



unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CAMPUS CASCAVEL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO ROSSONI ZENI
FELIPE AUGUSTO KLUMB
FELIPE SALATESKI SIMÃO
MILENA YUMI HIGASHI

**RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PROMAT
METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO: ESTÁGIO
SUPERVISIONADO II**

CASCAVEL

2024

Eduardo Rossoni Zeni
Felipe Augusto Klumb
Felipe Salateski Simão
Milena Yumi Higashi

**RELATÓRIO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS NO PROMAT
METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO: ESTÁGIO
SUPERVISIONADO II**

Relatório das atividades desenvolvidas durante o projeto Promat, apresentado como requisito parcial à aprovação na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino: Estágio Supervisionado II, do Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus Cascavel.

Orientadores: Dulcyene Maria Ribeiro e Rogério Luis Rizzi

CASCADEL

2024

Lista de figuras

Figura 1 - Árvore de possibilidades.....	20
Figura 2 - Mapa da região de Cascavel-PR	27
Figura 3 - Cofre utilizado pelos professores.....	37
Figura 4 - Baralho completo do jogo Uno	40
Figura 5 - Tabela de tempos	44
Figura 6 - Quadro de tempo.....	44
Figura 7 - Quadro com desvio de tempo	45
Figura 8 - Taxa de mortalidade.....	49
Figura 9 - Tabuleiro da atividade "Avançando com o Resto"	50
Figura 10 - Representação da resolução	56
Figura 11 - Malha quadriculada já preenchida	58
Figura 12 - Classificação de sistemas lineares	81
Figura 13 - Formas geométricas	81
Figura 14 - Classificação dos sistemas lineares.....	95
Figura 15 - Sistema de duas incógnitas	98
Figura 16 - Gráfico com três incógnitas	98
Figura 17 - Plano cartesiano da sala	112
Figura 18 - Quadrantes do ciclo trigonométrico.....	112
Figura 19 - Distância entre pontos I	113
Figura 20 - Distância entre pontos II	114
Figura 21 - Distância entre pontos III.....	115
Figura 22 - Gráfico da função $f(x) = 3x + 4$	117
Figura 23 - Coeficiente angular da função $f(x) = 3x + 4$	118
Figura 24 - Coeficiente angular de uma função.....	118
Figura 25 - Processo para encontrar equação geral da reta I	119
Figura 26 - Processo para encontrar equação geral da reta II.....	120
Figura 27 - Problema da choupana	131
Figura 28 - Nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo	132
Figura 29 - Triângulo retângulo.....	133
Figura 30 - Triângulo retângulo.....	133
Figura 31 - Triângulo retângulo.....	134
Figura 32 - Triângulo formado pela Lua, Sol e observador	135
Figura 33 - Obtenção do seno, cosseno e tangente de 45°	136

Figura 34 - Obtenção do seno, cosseno e tangente de 30° e 60°	137
Figura 35 - Problema do avião.....	138
Figura 36 - Prédio	138
Figura 37 - Terreno para dividir	139
Figura 38 - Problema do cilindro.....	140
Figura 39 - Medição do rio usando trigonometria	140
Figura 40 - Problema entrada de luz.....	141
Figura 41 - Elementos da circunferência	146
Figura 42 - Raio da circunferência	147
Figura 43 - Ciclo trigonométrico	149
Figura 44 - Ângulo de 30° graus no plano cartesiano.....	150
Figura 45 - Seno e cosseno no ciclo trigonométrico.....	150
Figura 46 - Sinais que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada quadrante	151
Figura 47 - Triângulo retângulo de lados a, b e c	152
Figura 48 - Representação do teorema de Pitágoras.....	152
Figura 49 - Gráfico da função Seno.....	161
Figura 50 - Gráfico da função Cosseno	162
Figura 51 - Gráfico da função Tangente.....	162
Figura 52: efeito do parâmetro do gráfico de seno	163
Figura 53 – Gráfico da função $f(x) = x^2$	164
Figura 54 - Gráfico da função $f(x) = x^3$	164
Figura 55 - Exercício sobre função trigonométrica Enem.....	165
Figura 56 - Roda gigante e função trigonométrica	166
Figura 57 - Gráficos de funções trigonométricas	167
Figura 58 - Jogo Dorminhoco.....	168
Figura 59 - Quebra-cabeça.....	173
Figura 60 - Desafio RPG I.....	176
Figura 61 - Desafio RPG II.....	177
Figura 62 - Desafio RPG III	178
Figura 63 - Desafio RPG IV	179
Figura 64 - Desafio Ciclo Trigonométrico I.....	181
Figura 65 - Desafio Ciclo Trigonométrico II.....	182

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Função $f(x) = x$	117
Tabela 2 - Relações trigonométricas dos ângulos notáveis	137
Tabela 3 - Valores da função seno, cosseno e tangente.....	160

Lista de Quadros

Quadro 1 - Bairros de Cascavel	44
Quadro 2 - Quadro de candidatos	48
Quadro 3 - Malha quadriculada a ser colorida.....	57
Quadro 4 - Nota correspondente as três provas	59
Quadro 5 - Nota referente aos três trabalhos	60
Quadro 6 - Preço dos alimentos em dois mercados distintos	61
Quadro 7 - Resultado dos dois mercados	62
Quadro 8 - Consumo ideal de cálcio por dia	65
Quadro 9 - Idade em relação a quantidade de alunos	65
Quadro 10 - Itens da viagem.....	86
Quadro 11 - Consumo dos três dias	100
Quadro 12 - Soma e diferença de arcos	153

Sumário

INTRODUÇÃO.....	7
SEÇÃO 1 – O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL – RELATO DE EXPERIÊNCIA	8
1.1 INTRODUÇÃO.....	8
1.2 OS MATERIAIS DIDÁTICOS.....	8
1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL	10
1.4 RELATOS DE CASOS	11
1.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	14
SEÇÃO 2 – PROMAT.....	16
2.1 AULA 01 – Análise Combinatória (24/08)	18
2.2 AULA 02 – Probabilidade e Estatística (31/08)	36
2.3 AULA 03 – Matrizes e Determinantes (14/09)	55
2.4 AULA 04 – Sistemas Lineares I (21/09)	77
2.5 AULA 05 – Sistemas Lineares II (28/09).....	95
2.6 AULA 06 – Geometria Analítica (05/10).....	111
2.7 AULA 07 – Trigonometria I (26/10).....	131
2.8 AULA 08 – Trigonometria II (09/11).....	146
2.9 AULA 09 – Funções Trigonométricas (23/11).....	160
2.10 AULA 10 – Gincana (30/11).....	173
SEÇÃO 3 – CONSIDERAÇÃO FINAIS	188

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo elencar pontos de nossa trajetória na disciplina de Estágio Supervisionado II, mais especificamente do período de realização do Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas - Promat, que é um projeto de ensino desenvolvido por professores e alunos do Curso de Matemática da Unioeste, campus Cascavel para estudantes de escolas públicas. Foram realizados dez encontros.

O projeto tem por objetivo atender alunos do Ensino Médio da rede pública estadual de ensino, que buscam acesso aos cursos superiores, alunos de graduação e, neste ano, também tivemos alguns alunos egressos do Ensino Superior, enquanto promove aos graduandos do curso de Licenciatura em Matemática uma oportunidade de praticar as habilidades que foram ensinadas no curso. No formato de “Curso Preparatório de Matemática”, oferta conteúdo de matemática relacionado ao Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio, exigido em vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

Para isso, foram elaborados planos de aula, atividades e tarefas para dez encontros, que fazem parte desse relatório. Além disso, constam relatórios de cada aula ministrada, que descrevem aspectos observados nas aulas pelos professores-estagiários. Neste relatório ainda enfatizamos nossas atuações como professores, relatamos as atividades que deram ‘certo’ e as atividades que deram ‘errado’, mas que nos permitiram construir experiência de ensino com diferentes metodologias, que nos auxiliarão a ministrar aulas no futuro.

Este projeto se fez relevante na nossa formação, como futuros professores, pois como o tempo de aula é maior e sem interrupções, torna mais fácil o desenvolvimento de aulas baseadas nas tendências metodológicas, o que durante a regência nas escolas é algo mais difícil de acontecer. Trabalhar por meio das tendências nos proporcionou confiança, domínio e amadurecimento para atuação na profissão futuramente e aprimorar o processo de ensino-aprendizagem.

SEÇÃO 1 – O USO DE MATERIAIS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DE GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL – RELATO DE EXPERIÊNCIA

1.1 INTRODUÇÃO

A utilização de materiais didáticos no ensino de Matemática tem sido amplamente defendida como uma prática essencial para promover um aprendizado mais eficaz e significativo. Nesse contexto, o ensino de Geometria, tanto plana quanto espacial, pode ser significativamente enriquecido pela utilização desses recursos, tornando conceitos complexos mais acessíveis e visualizáveis.

O uso de materiais didáticos manipuláveis, como triângulos feitos de EVA e sólidos geométricos, tem se mostrado uma abordagem eficaz para introduzir e reforçar tópicos de geometria. No entanto, segundo Almeida (2015), o ensino da geometria tem sido prejudicado nas etapas do ensino fundamental e médio.

O ensino de geometria ainda é deixado de lado por muitos professores. Os conteúdos da geometria parecem não ter tanta importância em relação ao de outras disciplinas, talvez a razão esteja na complexidade de suas representações (ALMEIDA, 2015 apud Barros, Silva, 2022).

Considerando esse panorama, busca-se neste texto refletir sobre as potencialidades do uso de materiais didáticos manipuláveis para superar essas dificuldades de ensino e promover uma aprendizagem mais interativa e visual. A seguir, serão apresentados dois relatos de casos que aconteceram durante nossa regência nas escolas e que exemplificam a aplicação de materiais didáticos no ensino de geometria plana e espacial, demonstrando como sua utilização pode contribuir para a melhor compreensão e fixação dos conceitos.

1.2 OS MATERIAIS DIDÁTICOS

A utilização de materiais didáticos foi uma metodologia adotada em nossa prática pedagógica, pois, conforme a interpretação de Comenius citada por Lorenzatto, a construção do conhecimento está intrinsecamente relacionada à experiência direta. Os materiais didáticos funcionam como recursos que possibilitam aos alunos interagir com o mundo real, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio, como enfatizado por Vygotski (Lorenzatto, 2006).

É importante definir o que são materiais didáticos. Adotaremos aqui a definição dada por Lorenzatto (2006), de que o material didático pode ser qualquer recurso que auxilia no

processo de ensino-aprendizagem, o que poderia ser um giz, uma calculadora, um jogo, uma embalagem, por exemplo. O autor ainda menciona que

Existem vários tipos de MD [Materiais Didáticos]. Alguns não possibilitam modificação em suas formas; é o caso dos sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina, por exemplo, que, por serem estáticos, permitem só a observação. Outros já permitem uma maior participação do aluno: é o caso do ábaco, do material montessoriano (cuisenaire ou dourado), dos jogos de tabuleiro (Lorenzatto, 2006, p.18).

Fachi (2022) destaca que, de acordo com Nacarato (2004-2005), o uso de materiais didáticos é fundamental no ensino de Matemática, pois possibilita a introdução dos alunos ao contato com objetos concretos. A manipulação desses objetos concretos é essencial para promover uma compreensão mais eficaz dos conteúdos, facilitando a aprendizagem de conceitos abstratos.

Rodrigues e Gazire (2012) também ressaltam que Passos (2006) apontou que o vínculo com a materialidade como uma forma de superar as dificuldades de ensino teve sua influência a partir do Movimento Escola Nova, que defendia a importância do uso de materiais concretos para que os alunos aprendessem por meio da prática.

[...] esse apego à materialidade como forma de amenizar as dificuldades de ensino, teve influência a partir do Movimento Escola Nova, que defendia o uso de material concreto para que os alunos pudessem aprender fazendo. No entanto, segundo essa autora, muitos professores tiveram uma compreensão restrita desse processo, ao entenderem que a simples manipulação empírica destes objetos levaria à aprendizagem de conceitos. Porém, essa falsa ideia em relação ao aprender fazendo, ainda que mal interpretada, contrapunha a postura tradicional da escola, que afirmava que o “uso de materiais ou objetos era considerado pura perda de tempo, uma atividade que perturbava o silêncio ou a disciplina da classe” (FIORENTINI; MIORIN, 1990, p. 2 *apud* Rodrigues, Gazire, 2012, p 188).

Em nossas ações em sala de aula, não esperávamos que o uso de materiais didáticos fosse suficiente, por si só, para criar um ambiente de ensino-aprendizagem eficaz. Buscamos, na verdade, um ensino reflexivo sobre os materiais didáticos e seus propósitos, conforme destacado por Lorenzatto:

Os MD [Materiais Didáticos] podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam, e, por isso, o professor deve perguntar-se para que ele deseja utilizar o MD: para apresentar um assunto, para motivar os alunos, para auxiliar a memorização de resultados, para facilitar a redescoberta pelos alunos? São as respostas a essas perguntas que facilitarão a escolha do MD mais conveniente à aula (Lorenzatto, 2006, p.18).

Trabalhamos com os alunos todas estas funções, porém as funções que se destacaram são apresentar um assunto e auxiliar a memorização de resultados. Para isso, utilizamos dois materiais principais: triângulos feitos com EVA para uma aula de revisão de área de triângulos

e os sólidos geométricos de acrílico disponibilizados pelo Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, para trabalhar conceitos de geometria espacial relacionados a poliedros, prismas e pirâmides.

Durante os planejamentos das aulas do Promat, tentávamos também utilizar materiais didáticos, tendo em vista o impacto positivo que eles podem propiciar na aprendizagem. Utilizamos brinquedos, livros de ficção, lanternas, laser, globo terrestre e outros materiais que apresentaram uma boa recepção por parte dos alunos. Neste artigo, focaremos no uso desses materiais para o ensino de Geometria plana e espacial.

1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Durante nossa regência, nos deparamos com situações que nos motivaram a fazer reflexões sobre o uso de materiais didáticos para o ensino de geometria. Uma delas foi, ao apresentar o conceito de cálculo de volume de prismas para alunos do terceiro ano do Ensino Médio e acompanhá-los em suas resoluções. Uma aluna estava claramente sem saber o que fazer. Quando perguntamos qual era sua dúvida, ela disse que não sabia como calcular a área de um quadrado.

Ao nos depararmos com esta pergunta, percebemos como o ensino de geometria plana foi insuficiente para esta aluna e nos questionamos se isso poderia ser algo recorrente na educação brasileira.

Assim como a geometria plana, a geometria espacial é pouco vista no ensino fundamental e médio e como consequência, gera-se uma grande dificuldade de visualizar a geometria como ela deve ser. Pavanello (2004) comenta que há uma exclusão dessa matéria no currículo escolar com a chegada da Matemática Moderna, transformando a geometria em algo mais formal, mais algébrico e menos visual e é claro que com essa exclusão e/ou esse tratamento inadequado com a matéria, surgem problemas na formação do aluno.

Não estamos tratando de uma desvalorização da Álgebra, dizem Settimy e Bairral (2020). Não se pode focar em apenas uma vertente, mas desenvolver tanto pensamento visual dominante na Geometria, quanto o sequencial da Álgebra, pois assim conseguiremos estimular o pensamento matemático entrelaçando os dois conteúdos e não os separando.

As considerações de Pavanello (2004) vão além do ensino na Educação Básica, afirmando que mesmo no ensino superior é visto uma grande dificuldade na geometria por parte dos alunos

Mesmo nos cursos superiores de matemática constata-se que os alunos apresentam muita dificuldade em compreender os processos de demonstração ou são incapazes de

usá-los ou mesmo de utilizar qualquer tipo de representação geométrica para a visualização de conceitos matemáticos (Pavanello, 2012, p.3).

A dificuldade antevista na geometria plana agrava na geometria espacial, visto que a falta de uma boa base acarreta as dúvidas. Conforme as dificuldades forem surgindo, outros modos de ensino precisam ser pensados. Atualmente com a tecnologia a nossa disposição, diversos softwares como o ‘Geogebra 3D’, ‘Tangram 3D’ por exemplo, são ótimos auxiliares para o ensino, mas devem ser bem utilizados. Fassarela e Rocha (2018, p.263) argumentam que

O simples uso do computador, do celular ou de outros recursos tecnológicos não garante aprendizagem, por mais promissor que isso possa ser. É necessário que o professor tome providências adequadas para que sua inserção na sala de aula realmente favoreça o desenvolvimento das potencialidades individuais e coletivas - seja facilitando, ampliando ou aprofundando as possibilidades de abordagens [...].

Um método sugerido por Settimy e Bairral (2020) é relacionar as formas geométricas espaciais com objetos encontrados no dia a dia do aluno, associando o conteúdo visto no colégio com o cotidiano. Por tratar-se de geometria, o processo visual acaba sendo muito impactante para o aprendizado, então elaborar atividades com a utilização de recursos visuais relacionando-as com o mundo que os alunos vivem acaba dando significado e sentido ao ensino da geometria espacial.

1.4 RELATOS DE CASOS

Planejamos inicialmente uma aula para alunos do segundo ano do Ensino Médio, em que seria abordado o conteúdo de cálculo de área e perímetro de figuras planas. Para isso, consoante com o exposto acima, resolvemos utilizar materiais manipulativos para mostrar aos alunos a intuição por trás das fórmulas de sete figuras geométricas: quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramo, trapézio, losango e círculo.

Como nos propusemos em abordar todas essas fórmulas em uma única hora-aula, optamos por uma aula mais expositiva. Isto é, acabamos por não disponibilizar um material manipulativo para cada aluno, mas preparamos um só, o qual foi exposto pelos docentes para todos da turma.

Os materiais consistiam em pedaços de cartolina e EVA recortados em formatos dessas figuras geométricas. Todos esses materiais (exceto o círculo) foram recortados em uma cartolina quadriculada, com quadrados de lado 8 cm. Esses quadrados foram fundamentais para que os estudantes pudessem contabilizar a área de cada figura.

Primeiramente, mostramos como calcular a área de quadrados e retângulos por meio de seu preenchimento com quadrados unitários menores. Para isso, utilizamos um pedaço de tecido

TNT de exatamente $1 m^2$ de área e, com ele, fomos preenchendo o piso da sala de aula (retangular). Foi possível notar que os estudantes estavam acompanhando o raciocínio por meio dos *feedbacks* que nos forneciam.

Com base na ideia de quadrados unitários, começamos a utilizar os materiais, pedindo que os alunos imaginassem que cada um dos quadrados da malha quadriculada da cartolina era um quadrado unitário. Os materiais didáticos seguiam uma sequência lógica. Por exemplo, tendo exposto aos alunos como calcular a área de um retângulo, dobrávamos uma cartolina retangular para originarmos um triângulo e, com base nisso, analisar quantos quadrados da malha quadriculada estávamos descartando para originar a nova figura.

O círculo que preparamos era feito de EVA e composto por duas partes, cada uma em um semicírculo. Esses semicírculos, por sua vez, eram divididos em várias “fatias”. Por meio da manipulação do material, mostramos como aproximar a área de um círculo transformando-o em uma figura semelhante a um retângulo.

Ao fim da aula, pudemos perceber que alguns alunos estavam um tanto cansados, devido ao fato dela ter sido expositiva e condensada. Sendo assim, para uma aprendizagem ainda mais efetiva, acreditamos que, fornecer os materiais didáticos aos estudantes teria sido uma boa escolha. Porém, ainda assim obtivemos resultados satisfatórios. Muitos estudantes acharam divertido e esclarecedor a dinâmica de calcular a área da sala. Alguns comentaram conosco que acharam intuitivo e lógico visualizar o preenchimento do piso da sala como sendo calcular sua área, o que mostra a eficácia do Material Didático para a finalidade proposta. Na ocasião, ainda estava presente a pedagoga da turma, a qual elogiou o uso de materiais concretos para a abordagem dos conteúdos para os alunos.

Para a primeira aula para alunos do terceiro ano do Ensino Médio sobre poliedros, fornecemos uma tabela a ser preenchida, sólidos geométricos em acrílico e papel e figuras destes poliedros para que os alunos colassem imagens que representassem os poliedros na tabela. Depois era preciso relacionar os poliedros com os polígonos que compunham cada poliedro, além de contar e anotar o número de faces, vértices e arestas de cada um deles.

Quadro 1 - Atividade para análise de polígonos

Figura	Polígonos que o compõem	Nome do poliedro	Nº Faces	Nº Vértice	Nº Arestas
---------------	--------------------------------	-------------------------	-----------------	-------------------	-------------------

--	--	--	--	--	--

Fonte: Autores

Manusear o material didático permitiu que os alunos contassem os elementos dos sólidos e associassem o número de faces ao seu respectivo nome. Eles não tiveram dificuldades em identificar os polígonos, pois conseguiam verificar facilmente ao observar os sólidos, mas a contagem das faces, vértices e arestas foi mais desafiadora, especialmente no caso do dodecaedro e do icosaedro, pela quantidade maior de faces, vértices e arestas. Durante a atividade, circulamos entre as mesas, esclarecendo dúvidas e auxiliando os alunos na contagem dos elementos de cada poliedro. Uma aluna ficou com dificuldade de contar o número de faces e não estava conseguindo encontrar uma maneira de contar. Mostramos, com o sólido em mãos, que ela poderia “separar” as faces em pequenos grupos, para ficar mais fácil de contar, assim ela conseguiu identificar o número de faces.

Após alguns minutos, discutimos a distinção entre poliedros convexos e não-convexos. Para ilustrar as características dos poliedros não-convexos, mostramos dois poliedros, um em acrílico, fornecido pelo LEM da UNIOESTE e outro construído por nós com uma caixa de papelão. Explicamos que, ao traçar uma reta em alguns de seus pontos, ela teria mais de dois pontos de interseção com o poliedro, ou seja, "entraria" e "sairia" do poliedro mais de uma vez e os estudantes não mostraram dificuldade em compreender este conceito ao apresentarmos com a caixa de papelão. Nas aulas preparatórias para a recuperação de conteúdos, ao final do estágio, quando perguntamos quem lembrava o que eram poliedros não-convexos, muitos alunos mencionaram a caixa de papelão como exemplo para explicar o conceito novamente.

Em síntese, esta aula foi uma oportunidade significativa para introduzir conceitos fundamentais da geometria espacial. Através da utilização de materiais manipuláveis, como os sólidos geométricos e as imagens dos poliedros, foi possível incentivar a interação dos alunos com os objetos matemáticos, promovendo uma aprendizagem mais concreta e visual. A atividade permitiu que os alunos identificassem os polígonos e contassem os elementos dos sólidos, o que gerou desafios, especialmente com poliedros de maior complexidade, mas a abordagem didática, que incluiu exemplos físicos e discussões sobre poliedros convexos e não-convexos, favoreceu a compreensão das propriedades desses objetos, contribuindo para um aprendizado mais profundo e significativo.

1.5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O uso de materiais didáticos manipuláveis se mostrou uma estratégia eficaz para o ensino da Geometria durante nossa regência, como visto ao longo deste estudo. A utilização de recursos como sólidos geométricos de diversos tipos e figuras planas feitas de cartolina e EVA permitiu aos alunos uma aproximação visual e mais interativa com os conceitos matemáticos, facilitando o entendimento de tópicos, como o cálculo de áreas, volumes e a identificação de características dos poliedros.

As atividades propostas revelaram que, além da manipulação dos materiais, é essencial uma proximidade com os alunos a fim de estimulá-los a reflexão e a compreensão dos conceitos. A utilização de materiais concretos, como os sólidos geométricos, demonstrou sua capacidade de engajar os alunos, proporcionando uma experiência de aprendizado mais rica e significativa. No entanto, como destacado, a simples manipulação dos objetos não garante, por si só, a aprendizagem. A orientação do professor, que precisa questionar constantemente os objetivos pedagógicos de cada material e escolher as abordagens mais adequadas, foi crucial para o sucesso do processo de ensino.

A carência de uma base sólida em geometria plana impacta diretamente a aprendizagem de conteúdos mais avançados, como a geometria espacial, evidenciando a necessidade de um currículo construtivo que deve ser trabalhado durante toda a educação básica, pois os conhecimentos prévios influenciam na compreensão de novos conceitos, como visto no ensino de geometria espacial. Tal currículo deve se pautar em criar uma sequência lógica e adequada para a abordagem do conteúdo de geometria, bem como ser posto em prática por meio de aulas que utilizem materiais concretos para o melhor entendimento e engajamento dos estudantes.

Concluimos que a integração de materiais didáticos manipuláveis no ensino de geometria oferece um caminho promissor para a superação das dificuldades históricas que essa área enfrenta no currículo escolar. No entanto, o sucesso dessa abordagem depende de uma prática pedagógica reflexiva e de uma análise crítica sobre os materiais e métodos utilizados, garantindo que o ensino seja efetivo, interativo e significativo para os alunos.

1.6 Referências Bibliográficas

FACCHI, Maria Gabriela. **A Importância do uso de Materiais Manipuláveis no Ensino de Matemática**. 2022. 53 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2022.

FASSARELLA, Lucio Souza; ROCHA, Rosângelo Jesus da. Geogebra 3D: relato de uma experiência na superação de dificuldades de aprendizagem em geometria espacial. **Kiri-Kerê: Pesquisa em Ensino**, Espírito Santo, p. 261-275, 05 nov. 2018. Anual. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/kirikere/article/view/20347/14547>. Acesso em: 10 fev. 2025.

LORENZATO, Sérgio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

RODRIGUES, Fredy Coelho; GAZIRE, Eliane Scheid. Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 187-196, dez. 2012.

SILVA, Michele Barbosa da. **A aprendizagem de figuras planas**: um olhar a partir das dificuldades dos alunos. um olhar a partir das dificuldades dos alunos. Disponível em: <https://repositorio.ifpe.edu.br/xmlui/handle/123456789/1021?show=full>. Acesso em: 17 fev. 2024.

SETTIMY, Thaís Fernanda de Oliveira; BAIRRAL, Marcelo Almeida. DIFICULDADES ENVOLVENDO A VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA ESPACIAL. **Vidya**, [S.L.], v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020. Vidya. <http://dx.doi.org/10.37781/vidya.v40i1.3219>.

SEÇÃO 2 – PROMAT

O Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática, é um projeto de ensino institucional totalmente gratuito ofertado anualmente em duas edições pelo colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, *campus* de Cascavel/PR.

Nesse programa, os estudantes de licenciatura em matemática cumprem parte da carga horária obrigatória do estágio exigida pelo curso, ministrando aulas em grupos de 4 estagiários para a comunidade. Pode se inscrever no programa qualquer aluno, seja de colégio público ou particular, e os conteúdos abordados são voltados ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Normalmente, as aulas do Promat são divididas em dois semestres. No primeiro, os encontros são ministrados pelos discentes do 3º ano do curso de Matemática, na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado I) e, nos mesmos moldes, no segundo semestre letivo, as aulas são executadas por discentes do 4º ano do curso, na disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Os conteúdos abordados no primeiro período letivo são, principalmente, condizentes com o conteúdo para o Ensino Fundamental. No segundo semestre, os conteúdos são selecionados com um olhar para o Ensino Médio. Os encontros são realizados nas dependências da universidade, no período da manhã dos sábados, com duração de 3 horas e 40 minutos cada, com um intervalo de 20 minutos. No ano de 2024, as atividades aconteceram aos sábados pela manhã com início às 08:00 e findando às 11:40, dentro do período compreendido entre 24/08/2024 e 30/11/2024.

Todavia, como o calendário do ano letivo de 2024 da Unioeste foi atrasado por conta da pandemia, os conteúdos do primeiro e segundo semestre foram ministrados simultaneamente nessa edição atípica do programa. Assim, como discentes do 4º ano, ficamos responsáveis por ministrar os conteúdos de Ensino Médio para quatro turmas ao mesmo tempo que os alunos do 3º ano ministravam os conteúdos de Ensino Fundamental II para uma única turma.

No final do projeto, os alunos participantes recebem certificado de participação no projeto, compatível com a carga horária frequentada. Tendo em vista a importância desse projeto, busca-se trabalhar de forma a romper os possíveis obstáculos que os estudantes tenham e trazem da escolarização. Para isso, as aulas são supervisionadas pelos docentes e preparadas em quartetos, com várias referências, incluindo livros didáticos, materiais manipulativos e jogos confeccionados pelos próprios acadêmicos.

Utilizamos materiais lúdicos e jogos, pois acreditamos que os alunos têm uma fixação melhor dos conteúdos desta maneira. Também fizemos com que os estudantes trabalhassem em grupos para que houvesse mais diálogo e interação entre eles. O cronograma dos conteúdos abordados em cada um dos encontros está no quadro abaixo.

Quadro 2 - Cronograma dos encontros e conteúdos trabalhados

Encontro	Data	Conteúdos
1	24/08/2024	Análise combinatória
2	31/08/2024	Probabilidade e estatística.
3	14/09/2024	Matrizes e determinantes
4	21/09/2024	Sistemas lineares
5	28/09/2024	Sistemas lineares
6	05/10/2024	Geometria analítica
7	26/10/2024	Trigonometria
8	09/11/2024	Trigonometria
9	23/11/2024	Funções trigonométricas
10	30/11/2024	Gincana de encerramento

Fonte: Autores

2.1 AULA 01 – Análise Combinatória (24/08)

Plano de Aula

Público-Alvo: alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdos:

- Análise combinatória
- Princípio Fundamental da Contagem
- Fatorial
- Arranjo Simples
- Permutação Simples
- Combinação Simples

Objetivo Geral:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com análise combinatória, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer o princípio fundamental da contagem;
- Identificar as propriedades do fatorial;
- Diferenciar as técnicas de contagem.

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, slides, lista de exercícios impressa.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos com uma atividade de socialização entre professores e alunos que consistirá em um quiz com conteúdo básicos de matemática e raciocínio lógico. Antes de iniciarmos, os professores se apresentarão, darão uma introdução sobre como será o Promat, datas dos encontros, além de solicitar que os alunos disponibilizem seu número para contato, a fim de ter um meio de comunicação com todos. Após isso, iniciaremos as atividades.

Separaremos os alunos em duas filas. A cada rodada um aluno de cada fila se posicionará à frente de uma mesa, falarão seus nomes e o que esperam do Promat. Colocarão uma mão no ouvido e, ao final da leitura da questão, o aluno que conseguir pegar o objeto da mesa primeiro terá o direito de responder à pergunta. Se responder corretamente, o aluno ganhará um pirulito. Caso não responda corretamente, o outro colega poderá tentar responder.

Princípio Fundamental da Contagem

Depois desta socialização, começaremos com uma atividade que estará no material impresso. A imagem de um trecho da BR entre duas cidades estará impressa. Faremos perguntas de quantas formas os alunos conseguem chegar de uma cidade a outra.

Exercício 01 - Observe o mapa da região de Cascavel-PR. Existem 3 caminhos entre as cidades de Nova Aurora e Cafelândia e mais 3 caminhos entre Cafelândia e Cascavel. De quantas formas pode-se sair de Nova Aurora e chegar em Cascavel, passando por Cafelândia?

Comentários do exercício: os professores irão pedir para que os alunos escrevam e contabilizem todos os caminhos possíveis fazendo o diagrama de árvore. Ao todo, são 9 caminhos possíveis.

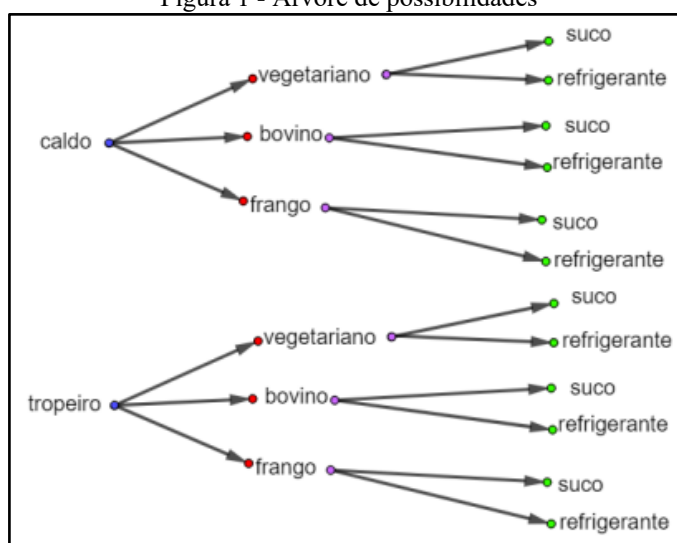
Ao finalizar a atividade, formalizaremos o princípio da contagem por meio da seguinte definição (que estará presente na apostila) e, logo após, serão passados dois exercícios aos estudantes:

Definição (princípio fundamental da contagem): se um problema possui n etapas sucessivas e independentes, multiplicamos as quantidades de escolhas que possuímos em cada uma das etapas para determinar o número total de maneiras de resolvê-lo.

Exercício 02 (Prado, 2021) – Em um restaurante, é oferecido o prato feito. Só há um tipo de arroz a ser servido, mas o cliente pode decidir entre 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro), 3 tipos de acompanhamento (carne bovina, frango ou vegetariano) e 2 bebidas (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas podem ser montados os pratos?

Comentários do exercício: será feita a resolução com base no princípio fundamental da contagem ($2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$) e, após isso, será montada a seguinte árvore de possibilidades.

Figura 1 - Árvore de possibilidades



Fonte: Prado, 2021

Permutação Simples e Fatorial

Exercício 03 – Você possui um estojo estilizado, em que é possível organizar seus 15 lápis de cor (todos diferentes) em cada um dos 15 espaços disponíveis. De quantas formas é possível organizá-los?

Comentários do exercício: utilizando o princípio fundamental da contagem, obtemos que há $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1.307.674.368.000$ possibilidades. Não será exigido que os alunos de fato calculem quantas são as possibilidades, apenas que saibam como utilizar o princípio multiplicativo para chegar à resposta.

O objetivo desse exercício é causar uma surpresa nos alunos com a magnitude desse número, o qual é maior que um trilhão. Com essa introdução, os professores irão abordar as definições de fatorial e permutação, bem como definição dos conceitos, os quais estarão na apostila.

Definição (fatorial): o fatorial de um número natural n não nulo é o produto de todos os números naturais de 1 até n . Denotamos o fatorial de n por $n!$. Por definição, $0! = 1$

Exemplos: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Exercício 04 – Veja a seguinte expressão numérica: $3 + 3 \times 0 + 3$. Acredite, a resposta é 3!

Comentários do exercício: o intuito dessa questão é abordar uma clássica “pegadinha” presente em alguns posts em blogs de matemática. A expressão numérica dada resulta em 6, que de fato é o fatorial de 3. Entretanto, quando lemos a última frase do enunciado, somos levados a confundir a notação de fatorial com um ponto de exclamação que encerraria a frase.

Exercício 05 – Calcule:

- a) $5!$ **120**
- b) $7! - 6!$ **5040-720=4320**
- c) $\frac{10!}{7!}$ **720**
- d) $\frac{8!+5!}{5!}$ **337**

Exercício 06 – De quantas formas possíveis podemos organizar as 52 cartas de um baralho convencional? (Não é necessário calcular. Apenas mostre utilizando a notação de fatorial)

Comentários do exercício: serão $52!$ possibilidades no total. O intuito dessa atividade é discutir o quão grande é esse número. Após a correção, os professores irão falar aos estudantes o surpreendente fato de que, se déssemos um baralho para cada uma das 8 bilhões de pessoas do planeta e estas os embaralhassem uma vez a cada segundo, seriam necessários mais de $3 \cdot 10^{50}$ anos para obtermos todas as configurações possíveis.

Definição (permutação simples): ao nos perguntarmos quantas são as possibilidades de permutar n elementos diferentes, obtemos $n!$ como resposta. Logo, denotamos a permutação de n objetos por P_n e a calculamos como sendo:

$$P_n = n!$$

Exercício 07 – Você possui os 3 primeiros livros da saga de Harry Potter (autoria de J. K. Rowling), dois livros de George Orwell (1984 e Revolução dos Bichos) e os livros Flores para Algernon (Daniel Keyes) e Quarto de Despejo (Carolina Maria de Jesus). Você deseja organizá-los na sua prateleira de modo que livros de um mesmo autor permaneçam juntos. De quantas maneiras é possível realizar esta tarefa?

Comentários do exercício: devemos perceber que iremos tomar 3 decisões sucessivas e independentes: escolher a ordem na qual os autores estarão dispostos; escolher a ordem dos livros de J. K. Rowling; escolher a ordem dos livros de George Orwell. Como temos 4 autores, 3 livros da primeira autora e 2 livros do segundo autor, os cálculos são:

$$P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 = 4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$$

Exercício 08 – (Enem Digital 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as 7 letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *****@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

Comentários do exercício: podemos analisar essa questão como sendo a permutação dos 5 grupos de letras: “edu”, “a”, “r”, “d”, “o”. Logo, o número de todas as possibilidades é dado por

$$P_5 = 5! = 120$$

Como um desses 120 anagramas já é utilizado por outro usuário, restam 119 anagramas possíveis para Eduardo.

Permutação com repetição

Exercício 09 – Quantos são os anagramas da palavra ovo?

Comentários do exercício: se as 3 letras fossem diferentes, teríamos $P_3 = 3! = 6$ possibilidades de permutação dessas letras. Entretanto, permutar duas letras “o” não altera o anagrama. Logo, devemos desconsiderar essas permutações. Será explicado aos alunos que, para desconsiderar permutações inválidas, dividimos o número de permutações de todos os elementos (neste caso, P_3) pelo número de permutações dos elementos que se repetem (neste caso, P_2).

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, há apenas 3 anagramas, os quais são: oov, ovo e voo.

Exercício 10 – Quantos são os anagramas da palavra arara?

Comentários do exercício: novamente, se todas as letras fossem diferentes, teríamos simplesmente $P_5 = 120$ anagramas. Entretanto, devemos desconsiderar as permutações das 3 letras “a” e das duas letras “r”. Para desconsiderar as duas de uma única vez, basta calcular

$$\frac{P_5}{P_3 \cdot P_2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10$$

Os 10 anagramas são: aaarr, aarar, araar, raaar, raara, raaaa, arraa, aarra, arara.

Com esses dois últimos exercícios, os professores terão base suficiente para abordar a definição de permutação com repetição, a qual estará escrita na apostila.

Definição (Permutação com repetição): A quantidade de permutações de n elementos com repetição, dos quais k_1, k_2, \dots, k_k são as quantidades dos diferentes elementos, e $n_1 + k_1, k_2, \dots, k_k = n$ é dada por:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_k} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_k!}$$

Exercício 11 – Em um torneio de futebol, um time obteve 3 vitórias, 5 empates e 2 derrotas, nas 10 partidas disputadas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido?

Comentários do exercício: podemos analisar essa questão como sendo a contagem de todos os anagramas da sequência de letras “VVVEEEEEDD”, em que “V” representa uma vitória do time, “E” um empate e “D” uma derrota. Sendo assim, aplicamos a fórmula que acabamos de discutir:

$$P_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3! \cdot 5! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 2} = 2520$$

Arranjo Simples

Exercício 12 – Em certa modalidade esportiva das Olimpíadas de Paris 2024, 9 atletas estão competindo pelas medalhas de ouro, prata e bronze. Quantos diferentes pódios podem ser formados para a competição?

Comentários sobre o exercício: utilizando o princípio multiplicativo, temos 9 possibilidades para a medalha de ouro, 8 para a de prata e 7 para a de bronze. Logo, o total de possibilidades é calculado por $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

De acordo com Silva (2022), alguns problemas de contagem que envolvem os conceitos de arranjo e combinação poderiam ser resolvidos apenas utilizando o princípio fundamental da contagem. No caso do arranjo, esse apontamento fica ainda mais evidente devido ao fato de que calcular um arranjo é realizar exatamente as mesmas contas presentes no princípio fundamental da contagem. Sendo assim, parece até redundante definir uma fórmula para o arranjo. Entretanto, é importante definir e discutir a fórmula do arranjo, visto que ela serve como uma introdução para a abordagem da fórmula da combinação de elementos.

Definição (Arranjo): O arranjo são os agrupamentos ordenados que podem ser formados com p elementos de um conjunto de n elementos ($n \geq p$). É usada quando se deseja saber quantas formas distintas existem de se organizar parte dos elementos do conjunto. Para calcular o arranjo de n elementos tomados p a p , representada por A_n^p , devemos ter:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Para a discussão da fórmula do arranjo, os professores retomarão o exercício 09 e irão resolvê-lo utilizando o novo conceito introduzido.

Exercício 13 – Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar apenas com os algarismos ímpares?

Comentários do exercício: os professores irão resolver o problema utilizando o princípio fundamental da contagem ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$) e a fórmula de arranjo

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{120}{1!} = 120$$

O intuito de duas resoluções distintas é reiterar para os estudantes que um arranjo sempre poderá ser visto como uma aplicação do princípio fundamental da contagem.

Exercício 14 - Numa turma de 10 alunos, se quiséssemos eleger um presidente de turma e um vice-presidente, quantas seriam as possibilidades? Mas e se quiséssemos escolher apenas dois representantes na turma toda (dentre os 10 alunos), as possibilidades seriam as mesmas?

Comentários do exercício: usando o princípio fundamental da contagem, $10 \cdot 9 = 90$. Usando a fórmula de arranjo, $A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$. Em relação à segunda parte da questão, não será exigido que os alunos cheguem no exato valor de 45 possibilidades. Será esperado apenas que notem que haverá menos possibilidades de escolha.

Combinação

Exercício 15 – Você deseja adotar dois gatos de estimação. No abrigo de animais, há 5 gatinhos filhotes que foram resgatados: Siamês, Frajola, Branco, Preto e Laranja. De quantas formas diferentes podemos escolher os gatos a serem adotados?

Comentários da questão: os professores irão sugerir que os alunos escrevam todas as 10 possibilidades de escolha que possuem, que são: SF, SB, SP, SL, FB, FP, FL, BP, BL e PL.

Após isso, será explicado o seguinte raciocínio que justifica a obtenção do resultado 10 e a fórmula de combinação: podemos ver esse problema como sendo o de colocar os 5 gatos em fila e escolher os dois primeiros. Teremos 5! possibilidades de ordenações dos gatinhos. Entretanto, se permutarmos os dois primeiros ou os três últimos, obteremos filas que nos dão exatamente a mesma escolha para a adoção. Sendo assim, precisamos desconsiderar essas permutações:

$$\frac{P_5}{P_2 \cdot P_3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = \frac{120}{12} = 10$$

Com essa breve explicação, será abordada a definição de combinação, já presente na apostila

Definição (combinação): a combinação de n elementos tomados p a p (denotamos por C_n^p) calcula de quantas formas possíveis podemos escolher p elementos em meio a n (com $n \geq p$). Essa combinação é calculada da seguinte maneira:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Exercício 16 (UFF) – Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. Qual é o número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher três destes locais, independentemente da ordem escolhida?

Comentários do exercício: temos 8 possibilidades e queremos escolher 3. Logo, utilizando a fórmula para a combinação de 8 termos tomados 3 a 3, temos:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot (8 - 3)!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Exercício 17 – Truco é um jogo jogado com um baralho de 40 cartas em que, a cada rodada, cada jogador recebe 3 cartas. O conjunto dessas 3 cartas é popularmente chamado de “mão”. Sendo assim, quantas “mãos” possíveis existem no truco?

Comentários do exercício: novamente, aplicando a fórmula da combinação, obtemos:

$$C_{40}^3 = \frac{40!}{3! \cdot 37!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{6} = 9880$$

Exercício 18 – Durante os Jogos Olímpicos, uma equipe de remo pode inscrever até 4 atletas para competir em uma prova de quatro remadores. Suponha que uma equipe tenha 10 atletas disponíveis e deseja formar uma equipe de 4 atletas para a competição. Quantas diferentes combinações de 4 atletas podem ser formadas a partir dos 10 atletas disponíveis?

Comentários do exercício: utilizando a fórmula de combinação, temos

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} = 210$$

Avaliação: A avaliação será feita por meio do acompanhamento da realização das atividades

Apostila – Análise combinatória

Exercício 01 - Observe o mapa da região de Cascavel-PR. Existem 3 caminhos entre as cidades de Nova Aurora e Cafelândia e mais 3 caminhos entre Cafelândia e Cascavel. De quantas formas pode-se sair de Nova Aurora e chegar em Cascavel, passando por Cafelândia?

Figura 2 - Mapa da região de Cascavel-PR



Fonte: Google Maps

Definição (Princípio fundamental da contagem): se um problema possui n etapas sucessivas e independentes, multiplicamos as quantidades de escolhas que possuímos em cada uma das etapas para determinar o número total de maneiras de se resolvê-lo.

Exercício 02 (Prado, 2021) – Em um restaurante, é oferecido o prato feito. Só há um tipo de arroz a ser servido, mas o cliente pode decidir entre 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro), 3 tipos de acompanhamento (carne bovina, frango ou vegetariano) e 2 bebidas (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas podem ser montados os pratos?

Exercício 03 – Você possui um estojo estilizado, em que é possível organizar seus 15 lápis de cor (todos diferentes) em cada um dos 15 espaços disponíveis. De quantas formas é possível organizá-los?

Definição (Fatorial): O fatorial de um número é a multiplicação desse número por todos os seus antecessores maiores que zero. Representamos o fatorial de um número n por $n!$

$$n! =$$

Exercício 04 – Veja a seguinte expressão numérica: $3 + 3 \times 0 + 3$. Acredite, a resposta é 3!

Exercício 05 – Calcule:

- a) $5!$
- b) $7! - 6!$
- c) $\frac{10!}{7!}$
- d) $\frac{8!+5!}{5!}$

Exercício 06 – De quantas formas possíveis podemos organizar as 52 cartas de um baralho convencional?

Definição (Permutação Simples): A permutação simples são todos os agrupamentos ordenados que podem ser formados com os n elementos de um conjunto usada quando se deseja saber quantas formas distintas existem de se organizar todos os elementos do conjunto. Para calcular a permutação de n elementos, representada por P_n , devemos ter:

$$P_n =$$

Exercício 07 – Você possui os 3 primeiros livros da saga de Harry Potter (autoria de J. K. Rowling), dois livros de George Orwell (1984 e Revolução dos Bichos) e os livros Flores para Algernon (Daniel Keyes) e Quarto de Despejo (Carolina Maria de Jesus). Você deseja organizá-los na sua prateleira de modo que livros de um mesmo autor permaneçam juntos. De quantas maneiras é possível realizar esta tarefa?

Exercício 08 - (Enem Digital 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as 7 letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *****@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

Exercício 9 – Quantos são os anagramas da palavra ovo?

Exercício 10 – Quantos são os anagramas da palavra arara?

Definição (Permutação com repetição): A quantidade de permutações de n elementos com repetição, dos quais k_1, k_2, \dots, k_k são as quantidades dos diferentes elementos, e $n_1 + k_1, k_2, \dots, k_k = n$ é dada por:

$$P_n^{k_1, k_2, \dots, k_k} =$$

Exercício 11 - Em um torneio de futebol, um time obteve 3 vitórias, 5 empates e 2 derrotas, nas 10 partidas disputadas. De quantas maneiras distintas esses resultados podem ter ocorrido?

Exercício 12 – Em certa modalidade esportiva das Olimpíadas de Paris 2024, 9 atletas estão competindo pelas medalhas de ouro, prata e bronze. Quantos diferentes pódios podem ser formados para a competição?

Definição (Arranjo): O arranjo são os agrupamentos ordenados que podem ser formados com k elementos de um conjunto de n elementos ($n > k$). É usada quando se deseja saber quantas formas distintas existem de se organizar parte dos elementos do conjunto. Para calcular o arranjo de n elementos, representada por A_n , devemos ter:

$$A_{n,k} =$$

Exercício 13 – Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar apenas com os algarismos ímpares?

Exercício 14 – Numa turma de 10 alunos, se quiséssemos eleger um presidente de turma e um vice-presidente, quantas seriam as possibilidades? Mas e se quiséssemos escolher apenas dois representantes na turma toda (dentre os 10 alunos), as possibilidades seriam as mesmas?

Exercício 15 – Você deseja adotar dois gatos de estimação. No abrigo de animais, há 5 gatinhos filhotes que foram resgatados: Siamês, Frajola, Branco, Preto e Laranja. De quantas formas diferentes podemos escolher os gatos a serem adotados?

Definição (combinação): Sejam n indivíduos. Queremos nesse grupo, escolher sem reposição p indivíduos para formar uma sequência não ordenada. Cada sequência não ordenada possível é chamada de combinação. O número de combinações possíveis é:

$$C_{n,p} =$$

Exercício 16 (UFF) – Niterói é uma excelente opção para quem gosta de fazer turismo ecológico. Segundo dados da prefeitura, a cidade possui oito pontos turísticos dessa natureza. Um certo hotel da região oferece de brinde a cada hóspede a possibilidade de escolher três dos oito pontos turísticos ecológicos para visitar durante sua estada. Qual é o número de modos diferentes com que um hóspede pode escolher três destes locais, independentemente da ordem escolhida?

Exercício 17 – Truco é um jogo jogado com um baralho de 40 cartas em que, a cada rodada, cada jogador recebe 3 cartas. O conjunto dessas 3 cartas é popularmente chamado de “mão”. Sendo assim, quantas “mãos” possíveis existem no truco?

Exercício 18 – Durante os Jogos Olímpicos, uma equipe de remo pode inscrever até 4 atletas para competir em uma prova de quatro remadores. Suponha que uma equipe tenha 10 atletas disponíveis e deseja formar uma equipe de 4 atletas para a competição. Quantas diferentes combinações de 4 atletas podem ser formadas a partir dos 10 atletas disponíveis?

TAREFA DE CASA – 24/08

1- Mauricio tem um restaurante e estava planejando enfeitar fazendo fitas decorativas com bandeirinhas das cores do Brasil (azul, verde e amarelo) para as Olimpíadas. Ele elaborou uma maneira para que não se repetisse duas vezes a mesma cor.

Sabendo que nas fitas vão 5 bandeiras, quais são as maneiras dele montar a decoração?

2- Quantas senhas com 4 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

3- O técnico da seleção brasileira, José Roberto Guimarães, do time de voleibol feminino possui a sua disposição 15 jogadoras que podem jogar em qualquer posição. De quantas maneiras ele poderá escalar seu time de 6 jogadores?

4- Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- Um entre os tipos de pão: italiano, branco e integral;
- Um entre os tamanhos: pequeno e grande;
- De um até cinco entre os tipos de recheio: peito de peru, atum, queijo, presunto e salame; sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

a) Quantos sanduíches distintos podem ser montados;

b) O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta do pão integral, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

5- Durante um festival de massas realizado na cidade de Nova Veneza, no estado de Goiás, dona Ana apresentou a seus clientes 5 novos sabores de molhos para serem colocados no macarrão. Se um cliente decidir pedir 3 porções de macarrão, de quantas maneiras distintas ele pode escolher os molhos para essas 3 porções?

a) 35

b) 42

c) 50

d) 62

e) 70

Referências:

ASTH, Rafael C. Quiz de matemática. **Toda matéria**. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/quiz-de-matematica/>. Acesso em: 08 ago. 2024.

PRADO, Etelviane Pereira do; **Plano de Aula do PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA, SUBPROJETO MATEMÁTICA – UNIPAMPA BAGÉ**; 2021. Disponível em: <https://sites.unipampa.edu.br/pibid/files/2022/03/plano-de-aula-10-introducao-ao-principio-da-contagem.pdf>. Acesso em: 04 ago. 2024.

GOOGLE. Google Maps. Disponível em: <https://www.google.com/maps/@-24.7100452,-53.3894578,10z?entry=ttu>. Acesso em: 7 ago. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Permutação simples**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/permutacao-simples.html>. Acesso em: 07 ago. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Fatorial**; Mundo Educação. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/fatorial.html>. Acesso em: 07 ago. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Exercícios sobre permutação com elementos repetidos**; Brasil Escola. Disponível em: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-permutacao-com-elementos-repetidos.html>. Acesso em: 07 ago. 2024.

SILVA, Josimar; Combinatória... Não ouse pensar diferente! **Revista do professor de matemática**, n. 106, p. 26-30, 2022.

Exame Nacional do Ensino Médio Digital (2020), 2º dia de aplicação, 7 fev. 2021. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos>. Acesso em: 08 ago. 2024.

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. **Exercícios sobre Arranjo ou Combinação**. Brasil escola. Disponível em: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-arranjo-ou-combinacao.htm>. Acesso em: 07 ago. 2024.

ASTH, Rafael C. **Exercícios de Análise Combinatória**. Toda matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-analise-combinatoria/>. Acesso em: 07 ago. 2024.

ASTH, Rafael C. **Combinação na matemática, como calcular e exemplos**. Toda matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/combinacao/>. Acesso em: 07 ago. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 24 de agosto

Esse foi o primeiro dia do Promat. Os estagiários se reuniram e ministraram a aula que aconteceu das 08:00 às 11:40. Havia 22 alunos presentes, dos quais a maioria era do 3º ano do Ensino Médio, mas cerca de seis deles eram alunos dos cursos de graduação da Unioeste. A aula iniciou com recados sobre requisitos para receberem certificação do Promat, horários das aulas e uma breve explicação de como iriam funcionar os encontros do Promat. Desde o início da aula estava presente um aluno com Transtorno do Espectro Autista (TEA). Ele estava acompanhado da sua mãe, a qual lhe ajudava nas atividades e explicações das definições.

A primeira parte da aula ocorreu bem, com a dinâmica de socialização proposta pelos professores. Todos os alunos participaram, se apresentaram e falaram sobre suas expectativas com o Promat. Dentre elas mencionaram: a preparação para o vestibular, o auxílio nas aulas da escola em si, a busca de horas complementares, no caso dos alunos de graduação, e alguns demonstraram que achavam interessante por se interessarem pela matemática em si.

Como a dinâmica consistia em um quiz, separamos os alunos em duas filas e cada um que conseguiu responder corretamente à pergunta, ganhou um pirulito. Aqueles que não conseguiram, receberam uma bala. As questões foram lidas, mas logo nas primeiras tentativas, os alunos não estavam conseguindo responder questões do tipo: “qual a fórmula para encontrar a área de um triângulo”. Assim que terminávamos de ler, os alunos demoraram para tentar responder, visivelmente sem saber a resposta. Com isso, os professores propuseram algumas alternativas para que eles tivessem como escolher “alternativa a: base vezes altura dividido por dois; alternativa b: base vezes altura”. Com estas opções de respostas, os alunos se sentiram mais confortáveis, mas ainda assim aconteceram mais erros do que esperávamos. As perguntas que foram respondidas corretamente foram as de expressões numéricas, do tipo: “qual é o resultado da expressão: $3 + 6 \times 2$?”, os professores escreveram no quadro as expressões e explicaram aquelas situações em que o aluno não respeitou a prioridade das operações.

Depois da dinâmica, os alunos sentaram e iniciamos o conteúdo da aula. Ao explicar a proposta dos primeiros exercícios, verificamos uma segurança maior dos alunos em relação a aula e aos conteúdos, se comparado à experiência do Promat anterior dos professores, já que os alunos pareciam ter mais facilidade de compreensão sem tanto auxílio dos professores. Notamos que isso pode ter acontecido pela escolha dos exercícios propostos, já que pareciam estar num nível que todos conseguiam executar, para alguns estava até fácil. Além disso, os alunos pareciam ter um domínio maior de execução das operações básicas.

Os alunos pareciam mais animados no começo, prestando atenção e interagindo aos poucos com os professores, mas essa animação começou a decair no segundo horário, sendo notado o uso prevalente do celular durante a aula, especialmente pelos alunos de graduação.

Para reforçar o que foi explicado no exercício 1 sobre o princípio fundamental da contagem, deixamos que os alunos resolvessem o exercício 2 e depois o resolvemos no quadro. Usamos a árvore de possibilidades para explicar, mas pelo que verificamos nas mesas dos alunos e durante a explicação, eles conseguiram compreender bem o conceito, mesmo sem a ajuda deste recurso visual.

Algumas apostilas tiveram erro de edição, em que foi cortada a questão 4. Como ela era uma questão para descontração e curiosidade sobre a propriedade de fatorial, escolhemos deixá-la de fora.

Já no exercício 3, eles tiveram mais dificuldade, assumindo que a solução do exercício era apenas fazer 15×15 . Já que eram 15 lápis de cores para serem distribuídos em 15 espaços disponíveis. Com isso, pedimos para que os alunos ponderassem quais eram as etapas sucessivas deste problema, se realmente eram apenas duas etapas (15 lápis para 15 espaços) ou se cada espaço do estojo era uma etapa diferente. Com isso, os alunos conseguiram desenvolver a resposta.

Também era visível a diferença dos níveis de compreensão dos alunos em relação ao conteúdo, com alguns alunos mais avançados do que outros. Estes alunos mais avançados, não aguardavam os professores dizerem qual exercício fazer, eles faziam o que era proposto para o momento, mas assim que terminavam já se adiantavam olhando e resolvendo os próximos exercícios. Com isso, verificamos que o propósito da apostila, de sempre ter alguns exercícios base para explicar o conteúdo e mais alguns reserva para caso tivéssemos tempo de realizar, foi cumprido.

No outro extremo, alguns alunos só faziam os exercícios que os professores pediam em voz alta para fazerem, apesar de já terem terminado os exercícios propostos e os professores estavam auxiliando outros alunos a finalizarem. Os alunos até possuíam um conhecimento maior da matemática básica do que o esperado, conseguindo fazer a simplificação de $5!$ durante o exercício 5d. Mesmo assim, algumas dúvidas surgiram em relação a alguns dos exercícios, como por exemplo porque não se pode fazer $7! - 6! = 7 \times 6! - 6! = 7$. Foi lembrado a prioridade das operações que tinha sido explicado durante o quiz do início da aula.

O exercício 6 resolvemos oralmente, em que comentamos sobre a grandeza do número de possibilidades diferentes de se organizar um baralho de 52 cartas. Essa foi uma exposição que os surpreenderam.

No exercício 7, trouxemos exemplares dos três primeiros livros da saga de Harry Potter (autoria de J. K. Rowling), dois livros de George Orwell (1984 e Revolução dos Bichos) e os livros Flores para Algernon (Daniel Keyes) e Quarto de Despejo (Carolina Maria de Jesus). comentados na questão para conseguir explicar visualmente qual era a problemática da questão, de considerar as permutações entre os livros de mesmo autor.

Já o exercício 8, os alunos não tiveram muita dificuldade de resolver. No entanto, nos exercícios 9 e 10, o recurso visual preparado pelos professores foi importante para ajudar os alunos a entenderem como funciona a permutação com repetição. O recurso consistia em letras feitas com E.V.A. coloridas, em que letras iguais foram feitas em cores diferentes, para mostrarmos porque precisamos desconsiderar alguns anagramas.

Também houve outro erro na apostila, na parte da definição de permutação com repetição, então pedimos para que os alunos corrigissem com base na versão corrigida que passamos no quadro.

Com o exercício 12, alguns alunos mostraram ter mais dificuldade por pensarem na permutação com repetição, assim fazendo a resolução $\frac{9!}{3!}$. Tivemos que intervir, pedindo para que pensassem novamente no princípio fundamental da contagem, e lembrando que, em um pódio, só queremos saber como organizar os três primeiros lugares, não importa como ficam as outras posições. Um aluno de graduação se voluntariou para resolver o exercício no quadro e, a partir da resolução dele, explicamos a fórmula do arranjo.

Como neste momento já estávamos chegando ao fim da aula, alguns dos exercícios foram deixados de fora, com a aula acabando na resolução do exercício 15 pela falta de tempo. Deixamos um tempo para que os alunos resolvessem e explicamos sobre a combinação com a ajuda do conceito abordado na questão sobre adotar gatos de um abrigo, em que a ordem da escolha não importava.

Sentimos maior segurança ao ministrar a aula, comparando ao Promat que participamos anteriormente. No entanto, também percebemos que não nos organizamos o suficiente previamente ao ponto de sabermos exatamente quemalaria o quê. Assim, no fim, alguns professores acabaram falando um pouco mais do que outros. Mesmo assim, sentimos que nenhum professor atrapalhou o outro em sua fala, aguardando uma brecha para fazer algum comentário complementar na fala do outro, além de estarem ativos buscando tirar possíveis dúvidas dos alunos e acompanhá-los nas resoluções de exercícios.

2.2 AULA 02 – Probabilidade e Estatística (31/08)

Plano de Aula

Público-Alvo: alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo:

- Probabilidade e Estatística
- Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Cálculo de probabilidade
- Probabilidade Condicional
- Medidas de tendências centrais (moda, média e mediana)
- Medidas de dispersão, variância e desvio padrão

Objetivo Geral:

(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com probabilidade e estatística, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar por meio da contagem de possibilidades qual o espaço amostral de um evento;
- Diferenciar eventos dependentes e independentes

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, cofre pequeno, lista de exercícios impressa.

Introdução

Iniciaremos dando uma pequena revisão do conteúdo da aula anterior, analisando as dúvidas remanescentes da lista impressa disponibilizada no fim da aula e seguiremos com a introdução do conteúdo de probabilidade e estatística.

Probabilidade

Dividiremos a sala em grupos e tomaremos o seguinte exercício para introduzir o cálculo de probabilidades

Exercício 01 – Um cofre possui 3 discos, cada um com todos os algarismos de 0 a 9. Quantas senhas possíveis existem para este cofre? Qual a chance de um ladrão acertar a senha na primeira tentativa?

Comentários do exercício: os professores irão trazer um cofre pequeno com as características descritas na questão e levantar o seguinte questionamento: quanto tempo um ladrão pode levar ($10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) e percebam que há várias combinações usando apenas 3 dígitos de senha. Em seguida, explicaremos como fazer o cálculo da probabilidade de o cofre ser aberto com a senha correta na primeira tentativa. Mostrando qual é o espaço amostral, eventos favoráveis e a probabilidade de o evento acontecer.

Figura 3 - Cofre utilizado pelos professores



Fonte: Autores, 2024

Após a resolução e correção do exercício, será iniciada a abordagem do conteúdo de probabilidade que estará descrito na apostila.

Experimentos aleatórios: são os experimentos que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza

Exemplos: lançar uma moeda e observar a face de cima, lançar um dado e observar a face de cima, de um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de defeituosas, de um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

Definição (espaço amostral): o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório indicado por Ω .

Exemplos:

- Lançar uma moeda: $\Omega = \{K, C\}$, onde K é cara e C é coroa;

- Lançar duas moedas: $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$, em que o par (a, b) representa a ocorrência da face a no primeiro lançamento, seguida da ocorrência da face b;
- Lançar um dado de 6 lados: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento: um evento A é um subconjunto do espaço amostral ($A \subset \Omega$). O evento A ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Os eventos que possuem um único elemento serão chamados de eventos elementares.

Probabilidade: é o campo da Matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios. Por meio dela, é possível analisar as chances de um determinado evento ocorrer. A probabilidade de um evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos do conjunto A e o número de elementos do espaço amostral dado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Atividade Avançando com o Resto

Ainda com a sala em grupos, será iniciado o jogo avançando com o resto. As instruções simples para o andamento do jogo estão escritas no exercício 02 e serão lidas em voz alta para os estudantes. O intuito da abordagem do jogo é o de praticar não só as definições acerca de probabilidade, mas também o conceito de divisor de um número. Caso surja a necessidade no meio da atividade, os professores irão passar a definição de divisor, resto da divisão e números primos para que os alunos consigam jogar o jogo proposto. Após isso, serão passados os exercícios 03, 04 e 05 (que também estarão na apostila) antes do conteúdo de probabilidade condicional.

Exercício 02 - Avançando com o resto: O tabuleiro encontra-se na última folha da apostila. Escolha um critério para definir quem iniciará o jogo, sendo que o início é na casa 52. Jogue o dado e verifique se o número em que você se encontra no tabuleiro é divisível pelo número sorteado no dado. Caso seja divisível, não sobrar resto, portanto não mova seu marcador. Caso tenha resto, avance a quantidade de casas referentes a ele.

- Quando você está na casa do número 36, qual é a chance de avançar? $\frac{1}{6}$
- Qual é a chance de avançar quando se está em uma casa de número primo? **Se o número for 2, 3 ou 5, a chance é de $\frac{4}{6}$. Caso contrário, ela aumenta para $\frac{5}{6}$.**
- Cite um número do tabuleiro em que a chance de avançar é de 2 em 6.

d) Se, independentemente do número sorteado no dado, você não avançar, em qual casa do tabuleiro você está? **Há apenas duas possibilidades: zero, que tem qualquer número como divisor, ou 60, que é múltiplo de todos os lados de um dado convencional.**

Terminada a atividade do jogo avançando com o resto, os professores irão trabalhar os próximos exercícios da apostila, os quais abordarão o problema de converter uma probabilidade dada em fração para porcentagem. Os professores irão explicar brevemente como fazer essa conversão antes dos problemas.

Fração para porcentagem: divida o numerador pelo denominador e multiplique o resultado por 100. Exemplo:

$$\frac{1}{16} = 1 \div 16 = 0,0625 \cdot 100 = 6,25\%$$

Porcentagem para fração: divida a porcentagem por 100. Exemplo:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Exercício 03 – (Enem) Em uma central de atendimento, 100 pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? Escreva a resposta em fração e porcentagem. $\frac{20}{100} = 20\%$

Exercício 04 – Numa cidade com 1000 eleitores haverá uma eleição com dois candidatos, A e B. É feita uma prévia em que os 1000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Qual é a probabilidade de que A ganhe a eleição? **100%**

Comentários do exercício: o intuito dessa questão é apresentar uma certa “pegadinha”, mostrando aos estudantes que é de suma importância interpretar os dados corretamente.

Probabilidade da união de eventos

Exercício 05 – No jogo de cartas Uno, só é possível jogar uma carta que possua o mesmo número ou a mesma cor daquela que está na mesa. Se um jogador não possui uma carta com essas características, deve comprar cartas da pilha de compra até conseguir uma carta que possa ser jogada. O baralho completo é composto pelas seguintes 108 cartas:

Figura 4 - Baralho completo do jogo Uno



Fonte: Dmitry Fomin (Wikipedia), 2013.

No início do jogo, são entregues sete cartas para cada jogador. Suponha que você está jogando com outros 3 amigos seus e, na primeira rodada de todas, a carta na mesa é um sete azul e você não possui uma carta apta a ser jogada. Qual é a probabilidade de que, após uma única compra, você consiga uma carta azul ou um sete?

Comentários do exercício: o intuito é que os alunos usem a imagem dada para contabilizar a quantidade de cartas que satisfazem os requerimentos, chegando a 30 possibilidades. Excluindo o sete azul que está sobre a mesa, são 24 cartas azuis e 7 setes. Entretanto, há uma carta que é azul e um sete ao mesmo tempo e que, por isso, está sendo contada duas vezes. Logo, o total de cartas que satisfazem às condições são: $24 + 7 - 1 = 30$. O número total de cartas do espaço amostral é 100, pois é o total de cartas subtraído da quantidade de cartas na sua mão e do sete azul que está sobre a mesa: $108 - 7 - 1 = 100$. Portanto, a probabilidade é:

$$P = \frac{30}{100} = 0,3 = 30\%$$

Após a resolução do exercício 05, será formalizado o raciocínio que fundamenta a fórmula da probabilidade da união de dois eventos. A seguinte definição estará na apostila:

Probabilidade da união de dois eventos: a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B – escrevemos $P(A \cup B)$ – é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Os professores irão refazer o exercício 05 utilizando a fórmula acima para que os alunos compreendam bem de onde surgiu o termo $P(A \cap B)$.

Correção do exercício 05: denotando por A o evento “carta comprada é azul” e por S o evento “carta comprada é um sete”, temos que $A \cap S$ representa o evento “carta comprada é azul e um sete”. Portanto, aplicando a fórmula:

$$P(A \cup S) = P(A) + P(S) - P(A \cap S) = \frac{24}{100} + \frac{7}{100} - \frac{1}{100} = \frac{30}{100} = 30\%$$

Probabilidade da interseção de eventos

Exercício 06 – No jogo Ludo, tirar o número 6 em um dado convencional de 6 lados possibilita ao jogador andar 6 casas e jogar novamente. Qual é a probabilidade de um jogador tirar dois números 6 consecutivos?

Comentários do exercício: os professores farão uma explicação do porquê multiplicamos as duas probabilidades para obter o resultado. Chamando de P o evento “tirar 6 no primeiro lançamento” e de S o evento “tirar 6 no segundo lançamento”, temos que a probabilidade de tirarmos 6 nos dois lançamentos (evento $P \cap S$) é dada por:

$$P(P \cap S) = P(P) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Eventos independentes: são eventos em que a ocorrência ou não de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Exemplo: lançamentos de dados consecutivos (exercício 06)

Probabilidade da interseção de eventos independentes: se A e B são dois eventos independentes, então:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Eventos dependentes: são eventos em que a ocorrência ou não de um deles afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Exemplo:

Probabilidade da interseção de eventos dependentes: se C e D são dois eventos dependentes, então:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D|C)$$

Em que $P(D|C)$ é chamada de **probabilidade condicional** e representa a probabilidade de D ocorrer sabendo que C ocorreu.

Exercício 07 – Pergunte ao seu grupo se alguém torce para o mesmo time de futebol da série A que você (se você não torce, escolha um time aleatório para chamar de seu). Algum de vocês torce para o mesmo time? Qual a probabilidade de que todos do grupo torçam para times diferentes?

Comentários do exercício: a resposta para essa questão depende do número de integrantes do grupo. Para um grupo com 3 pessoas, há dois eventos a serem analisados: evento A “a pessoa 2 torce para um time diferente da pessoa 1” e evento B “a pessoa 3 torce para um time diferente da pessoa 1”.

Probabilidade condicional

Com os alunos sentados ainda em grupos, faremos perguntas sobre eles, altura e idade, contar quantos são homens e mulheres, e, com essas informações, montaremos um quadro com todas as informações recolhidas.

Esse quadro será nosso ponto de partida para explicarmos os próximos conteúdos de probabilidade condicional e depois das medidas de tendências centrais, que são a moda, média e mediana. Faremos isso para que os alunos entendam o significado das tendências.

Com o quadro construído, vamos pedir para que calculem:

Exercício 08 – Ao fazer o sorteio de um prêmio entre os alunos, qual a chance de o sorteado ser

- a) Um homem com mais de 1,7m?
- b) Uma mulher com menos de 1,6m?
- c) Um homem com menos de 17 anos?
- d) Uma mulher de 16 anos?

Estatística

Em seguida, pediremos para que os alunos calculem a moda, média e mediana das alturas e das idades dos alunos da sala. A variância e o desvio padrão serão observadas grupo a grupo.

Definição (moda): o resultado mais recorrente de um conjunto.

Exemplo: tomando as idades das crianças de um certo condomínio as quais são 1, 5, 4, 8, 6, 8, 2, 10, a moda é 8, pois é o elemento que aparece mais vezes.

Definição (média): é a soma de todos os elementos do conjunto dividida pela quantidade de elementos do conjunto.

Exemplo: tomando as idades das crianças de um certo condomínio as quais são 1, 5, 4, 8, 6, 8, 2, 10, portanto o número de elementos é sete. Assim, a média será dada por

$$M = \frac{1 + 5 + 4 + 8 + 6 + 8 + 2 + 10}{8} = 5,5$$

Definição (mediana): valor central dos dados coletados, depois de colocá-los em ordem. Caso seja um número par de dados, devemos fazer a média entre os dois elementos mais ao centro.

Exemplo: tomando as idades das crianças de um certo condomínio as quais são 1, 5, 4, 6, 8, 2, 10. Para encontrar a mediana, primeiro colocamos as idades em ordem 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Temos sete elementos, portanto a mediana será o valor na posição central (5).

Caso os dados coletados fossem apenas 1, 2, 4, 5, 8, 10, ou seja, um número par de dados, devemos verificar quais são os elementos mais ao centro (4 e 5) e fazer a média entre eles

$$\left(\frac{4+5}{2} = 4,5\right)$$

Definição (variância): dado um conjunto de dados, a variância é uma medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor desse conjunto está do valor central (média). A fórmula para o cálculo da variância é dada por

$$V = \frac{\sum(x_i - M)^2}{n}$$

Onde

V é a variância

x_i é o valor sendo observado

M é o valor da média

n é o número de elementos da amostra tomada

Definição (desvio padrão): dado pela raiz quadrada da variância, o desvio padrão permite identificar o “erro” em um conjunto de dados, caso quiséssemos substituir um dos valores coletados pela média aritmética. O desvio padrão σ é dado por:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

e o usamos junto com a média.

Exercícios

1- (Enem 2015 - adaptada) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Figura 5 - Tabela de tempos

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

Fonte: Enem, 2015.

Determine a média, moda e mediana das informações do quadro.

2- A seguinte tabela mostra os preços nas corridas de moto taxi para diferentes bairros da cidade de Cascavel, e a quantidade de viagens registradas em um dia, para cada bairro.

Quadro 1 - Bairros de Cascavel

Bairros	Preço	Número de viagens
Cancelli	R\$ 20,00	3
Centro	R\$ 30,00	2
Neva	R\$ 35,00	3
Universitário	R\$ 40,00	2

Fonte: Autores

Calcule a média de preços das viagens neste dia.

3- (Enem 2019 PPL) Um fiscal de certa empresa de ônibus registra o tempo, em minuto, que um motorista novato gasta para completar certo percurso. No Quadro 1 figuram os tempos gastos pelo motorista ao realizar o mesmo percurso sete vezes. O Quadro 2 apresenta uma classificação para a variabilidade do tempo, segundo o valor do desvio-padrão.

Quadro 1:

Figura 6 - Quadro de tempo

Tempos (em minuto)	48	54	50	46	44	52	49
--------------------	----	----	----	----	----	----	----

Fonte: Enem, 2019

Quadro 2:

Figura 7 - Quadro com desvio de tempo

Variabilidade	Desvio padrão do tempo (min)
Extremamente baixa	$0 < \sigma \leq 2$
Baixa	$2 < \sigma \leq 4$
Moderada	$4 < \sigma \leq 6$
Alta	$6 < \sigma \leq 8$
Extremamente alta	$\sigma > 8$

Fonte: Enem, 2019

Com base nas informações apresentadas nos quadros, a variabilidade do tempo é

- a) Extremamente baixa.
- b) Baixa.
- c) Moderada.
- d) Alta.
- e) Extremamente alta.

Apostila – Probabilidade e Estatística

Exercício 01 – Um cofre possui 3 discos, cada um com todos os algarismos de 0 a 9. Quantas senhas possíveis existem para este cofre? Qual a chance de um ladrão acertar a senha na primeira tentativa?

Experimentos aleatórios: são os experimentos que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza

Exemplos: lançar uma moeda e observar a face de cima, lançar um dado e observar a face de cima, de um lote de 80 peças boas e 20 defeituosas, selecionar 10 peças e observar o número de defeituosas, de um baralho de 52 cartas, selecionar uma carta e observar seu naipe.

Definição (espaço amostral): o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório indicado por Ω .

Exemplos:

- Lançar uma moeda: $\Omega = \{K, C\}$, onde K é cara e C é coroa;
- Lançar duas moedas: $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$, em que o par (a, b) representa a ocorrência da face a no primeiro lançamento, seguida da ocorrência da face b no segundo lançamento;
- Lançar um dado de 6 lados: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento: um evento A é um subconjunto do espaço amostral ($A \subset \Omega$). O evento A ocorre se, realizado o experimento, o resultado obtido for pertencente a A. Os eventos que possuem um único elemento serão chamados de eventos elementares.

Probabilidade: é o campo da Matemática que estuda experimentos ou fenômenos aleatórios. Por meio dela, é possível analisar as chances de um determinado evento ocorrer. A probabilidade de um evento A ocorrer é a razão entre o número de elementos do conjunto A e o número de elementos do espaço amostral dado por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exercício 02 - Avançando com o resto: O tabuleiro encontra-se na última folha da apostila. Escolha um critério para definir quem iniciará o jogo, sendo que o início é na casa 52. Jogue o dado e verifique se o número em que você se encontra no tabuleiro é divisível pelo número sorteado no dado. Caso seja divisível, não sobrar resto, portanto não mova seu marcador. Caso tenha resto, avance a quantidade de casas referentes a ele.

- Quando você está na casa do número 36, qual é a chance de avançar?
- Qual é a chance de avançar quando se está em uma casa de número primo?
- Cite um número do tabuleiro em que a chance de avançar é de 2 em 6.

d) Se, independentemente do número sorteado no dado, você não avançar, em qual casa do tabuleiro você está?

Exercício 03 – (Enem) Em uma central de atendimento, 100 pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso. Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

Exercício 04 – Numa cidade com 1000 eleitores vai haver uma eleição com dois candidatos, A e B. É feita uma prévia em que os 1000 eleitores são consultados, sendo que 510 já se decidiram, definitivamente, por A. Qual é a probabilidade de que A ganhe a eleição?

Exercício 05 – Uma pesquisa realizada com 800 pessoas sobre a preferência pelas plataformas de streaming de uma cidade, evidenciou que 200 entrevistados assistem apenas à Netflix, 250 apenas ao Disney Plus e 50 assistem aos dois. Das pessoas entrevistadas, qual a probabilidade de sortear ao acaso uma pessoa que assiste à Netflix ou ao Disney Plus?

Exercício 06 – Ao fazer o sorteio de um prêmio entre os alunos, qual a chance de o sorteado ser:

- a) Um homem, sabendo que ele tem mais de 1,7m?
- b) Uma mulher, sabendo que ela tem menos de 1,6m?

TAREFA DE CASA

- 1- Considerando todos os divisores positivos do numeral 60, determine a probabilidade de escolhermos ao acaso, um número primo?
- 2- Uma moeda é lançada 10 vezes. Determine a probabilidade de sair “coroa” 7 vezes?
- 3- Sorteando-se um número de 1 a 20, qual a probabilidade de que esse número seja múltiplo de 2?
- 4- (Enem 2015) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Quadro 2 - Quadro de candidatos

Candidato	Média nas quatro primeiras atividades	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

Fonte: Enem, 2015

A ordem de classificação final desse concurso é:

- a) A, B, C, E, D
- b) B, A, C, E, D.
- c) C, B, E, A, D.
- d) C, B, E, D, A.
- e) E, C, D, B, A.

5- Uma escola está organizando uma olimpíada e uma das provas é uma corrida. Os tempos que cinco alunos levaram para completar a prova, em segundos, foram:

23, 25, 28, 31, 32, 35

Qual foi o desvio padrão dos tempos de prova dos alunos?

6- (UFF-RJ) Em ciências atuariais, uma tábua da vida é uma tabela, construída a partir de censos populacionais, que mostra a probabilidade de morte de um indivíduo em uma certa faixa etária. Tábuas da vida são usadas em planos de previdência e seguros de vida. A tábua da vida abaixo indica, por exemplo, que um indivíduo entre 1 ano (inclusive) e 2 anos (exclusive) tem 0,05% de chance de morrer.

Figura 8 - Taxa de mortalidade

Faixa etária [x, x + 1)	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10)
Probabilidade de morrer em %	0,69	0,05	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01

Fonte: National Vital Statistics Reports, vol. 54, no.14, 2006.

Supondo-se que existe um grupo de 1.000.000 pessoas que acabaram de completar 2 anos, segundo esta tabela, o número de pessoas deste grupo que farão aniversário de 3 anos é igual a:

- a) 997.000 c) 999.700 e) 999.970
 b) 999.500 d) 999.950

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Moda, média e mediana**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/moda-media-mediana.html>. Acesso em 08 ago. 2024.

RIZZO, Maria Luiza Alves. **Probabilidade**; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/probabilidade.html>. Acesso em 08 ago. 2024.

ASTH, Rafael C. **Probabilidade**; Toda Matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/probabilidade/>. Acesso em 08 ago. 2024.

ASTH, Rafael C. **Exercícios de Média, Moda e Mediana**; Toda Matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-media-moda-e-mediana/>. Acesso em 08 ago. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Exercícios sobre desvio-padrão**; Mundo Educação. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-desvio-padrao.html>. Acesso em 08 ago. 2024.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 5**: combinatória, probabilidade. 8 ed., São Paulo: Atual, 2013

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Exercícios sobre Propriedades da Probabilidade**; Brasil Escola. Disponível em: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-propriedades-probabilidade.html>. Acesso em: 08 ago. 2024.

UNO (jogo de cartas). Wikipédia: a enciclopédia livre, 2024. Disponível em: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Uno_\(jogo_de_cartas\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Uno_(jogo_de_cartas)). Acesso em: 08 ago. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 31 de agosto

No segundo dia de aula havia 17 alunos presentes, dos quais a maioria era do 3º ano do Ensino Médio, já que os alunos de graduação estavam ocupados com um evento no mesmo dia e horário. O assunto previsto para ser tratado nesse dia foi Probabilidade e Estatística. A aula iniciou com um recado e resolução da lista de tarefas da aula anterior, sendo disponibilizado de 10 a 15 minutos para sua resolução.

Pedimos para os alunos indicarem quais das perguntas eles possuíam dúvidas, sendo a 1 e a 5 as questões indicadas por eles. O exercício 1 foi rapidamente resolvido, sem dificuldades, mas durante a resolução do exercício 5, os professores se confundiram em relação ao enunciado, o que causou uma confusão na explicação. Um dos professores notou que um aluno tinha respondido corretamente à questão, e com isso, depois dos professores resolverem a questão 1 no quadro, utilizaram a resolução do aluno para explicar o problema de forma mais intuitiva, consequência de não termos preparado a solução dos exercícios de tarefa de casa nos planos de aula. Aprendemos o que não podemos repetir.

Ao iniciar a explicação sobre probabilidade, percebemos uma atenção maior no começo, com a atividade utilizando o cofre e a explicação com as moedas. Com o tempo, porém, os alunos começaram a perder o interesse por só estarem prestando atenção no quadro, sendo que, à medida que o professor perguntava algo para eles, ninguém respondia. Com a explicação feita, os professores apresentaram o jogo Avançando Com o Resto, o que fez com que se animassem de novo.

Depois de explicadas as regras, entregamos as peças do jogo para que jogassem à vontade e respondessem às perguntas na apostila depois. Alguns alunos tiveram dificuldades de entender o que significava avançar com o resto, mesmo depois da explicação dos professores. Por exemplo, um aluno caiu na casa 3 e só estava tirando números maiores do que 3 e não estava se movendo. Ao indagar o porquê, os alunos responderam que não era possível fazer a divisão, que seria um número com vírgula. Neste momento, chamamos a atenção de todos no quadro para explicar novamente, que sempre estamos buscando o resto da divisão, portanto, no exemplo $3 \div 5$, temos que o resto da divisão é 3, portanto os alunos poderiam mover-se 3 casas. Dito isto, vários alunos relataram estar com a mesma dúvida, e não estavam avançando antes da explicação.

Em outro momento do jogo, alguns alunos caíram nas casas 60 e 0 e não sabiam o que fazer. Indagamos por que eles não estavam conseguindo avançar, para que pensassem que estes números eram divisíveis por todos os números do dado. Depois de refletirem, pedimos para que, como eles não tinham possibilidade de avançar nesta casa, o número que tirassem no dado

na próxima rodada seria o número de casas que voltariam atrás para tentarem se mover novamente.

O jogo durou até o intervalo, sendo que um grupo não conseguiu terminar o jogo a tempo de responderem as questões antes de corrigirmos no quadro, já que os outros grupos todos já tinham terminado e respondido.

No segundo horário, os professores resolveram as questões do Avançando Com o Resto. Alguns tiveram dificuldade de entender o exercício 2 c), que consistia em encontrar um número que não fosse divisível apenas por dois números entre 1 e 6. Havíamos preparado algumas possíveis respostas como o 18, que não é divisível apenas por 4 e 5, ou o 20, que só não é divisível por 6 e 3. Um aluno respondeu que uma possibilidade era o próprio número 6. Assim que foi verificado no quadro, ficou claro que a resposta estava correta, já que 6 só não é divisível por 4 e 5.

Em seguida, explicamos como é feito o cálculo da porcentagem, uma pequena revisão para que os alunos pudessem resolver os exercícios 3 e 4. O exercício 3 foi resolvido corretamente por todos, só na parte de transformar a resposta em forma de fração para porcentagem que alguns alunos não souberam como transformar, então recorremos à anotação feita no quadro para que verificassem como fazer.

Muitos não viram prontamente que a resposta do exercício 4 deveria ser de 100%. No exercício 5, muitos alunos tiveram dificuldade, sendo que era pedido para eles acharem a quantidade de cartas que podia ser jogada no turno e o espaço amostral. Alguns conseguiram seguir o raciocínio de resolução corretamente, mas no final ou esqueciam de tirar a probabilidade duplicada do sete azul aparecer ou pensavam que tinham que tirar mais 21 cartas dos oponentes do baralho do espaço amostral.

No exercício 6, alguns alunos viram a definição de cálculo de probabilidade de eventos independentes e tentaram responder seguindo esta ideia, conseguindo chegar na resposta correta depois de explicarmos o que significa eventos independentes. Outros pensaram por si mesmo, mas chegaram no espaço amostral incorreto, pensando que deveriam fazer $2 \times \frac{1}{6}$. Havia ainda alguns que chegaram na forma de resolução correta, mas chutaram o resultado ($\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = 10\%$). Explicamos no quadro como resolver corretamente.

Não tivemos tempo de explicar e resolver um exercício de probabilidade condicional, mas o professor Felipe Klumb explicou rapidamente com um exemplo de sorteio de bolas pretas e brancas o que significa.

Ao final da aula, fizemos uma tabela com a altura e idade de todos, incluindo os quatro professores. Foi pedido para que os alunos organizassem os dados em ordem crescente e calculassem a média, mediana e moda destas informações. Pode-se destacar que os alunos lembravam sobre o conteúdo de moda, média e mediana, mas, pela falta de tempo, não foi possível explicar a fundo suas definições, como o cálculo da média em si. A aula acabou logo após os professores calcularem e escreverem no quadro os valores, mas sem mostrar por escrito como se faz a conta.

Passamos mais alguns recados em relação ao próximo fim de semana não ter aula, devido ao feriado. Alguns dos alunos fizeram os exercícios além da tabela, mas os professores não corrigiram pela falta de tempo.

Sentimos falta de maior preparação da resolução de exercícios da lista de tarefa de casa, além de separar mais tempo para explicar como calcular as medidas de tendência central, além de mais tempo para resolver exercícios sobre este conteúdo.

2.3 AULA 03 – Matrizes e Determinantes (14/09)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no PROMAT

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Matrizes e Determinantes

- Noção de matrizes
- Tipos de matrizes
- Igualdade de matrizes
- Soma, subtração e multiplicação de matrizes
- Definição e propriedades de determinantes
- Cálculo de determinantes

Objetivo Geral:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com matrizes e determinantes, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar o uso de matrizes para solução de problemas;
- Conhecer determinantes, como preparação para cálculos de sistemas lineares nas próximas aulas.

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, slides, lista de exercícios impressa.

Introdução

Para iniciar uma socialização sobre o que é uma matriz e suas utilizações, utilizaremos uma atividade de resolução de problemas elaborada pelos professores Dulcyene Maria Ribeiro, Lucas Campos Araujo, Evandro Sozo de Oliveira, Alexandre Carissimi e Elisangela Cristina Ribeiro. A atividade consiste em partir do conceito do que é um pixel, formar uma imagem colorindo um personagem famoso partindo de uma matriz.

Perguntaremos aos alunos se eles conhecem o significado dos valores 144p, 240p, 360p, 480p, 720p e 1080p. Explicaremos que esses valores representam as principais resoluções de telas e vídeos na internet.

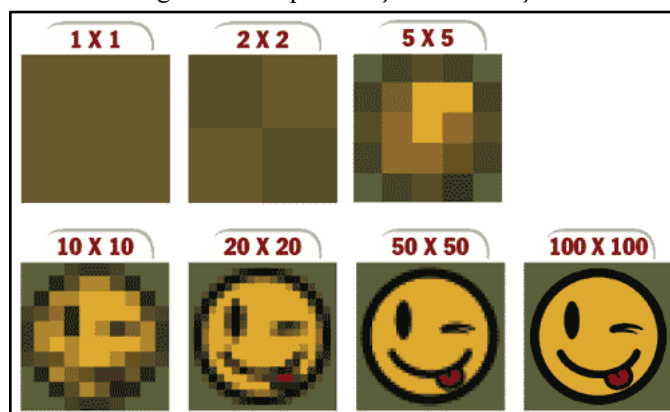
Para aprofundar o entendimento, esclareceremos que um pixel é a menor unidade de uma imagem digital, contendo informações sobre sua cor. Combinando três cores básicas (vermelho,

verde e azul), é possível criar mais de 16 milhões de cores diferentes. Como os pixels são pequenos pontos de luz muito próximos, eles se tornam praticamente invisíveis a olho nu. Portanto, quanto maior o número de pixels, melhor é a qualidade da imagem.

Retomamos a questão das resoluções, explicando que os valores apresentados correspondem a dimensões de imagens, como 144×256 , 240×427 , 360×640 , 480×853 , 720×1280 e 1080×1920 . Isso indica a quantidade de pixels em cada imagem. Por exemplo, uma resolução de 720p significa que a imagem tem 720 linhas e 1280 colunas de pixels, totalizando 921.600 pixels.

Para que os alunos percebam a diferença na qualidade, forneceremos um material impresso com imagens comparativas, adaptadas para mostrar como as resoluções afetam a visualização. Tal material está presente na Figura 10.

Figura 10 - Representação da resolução



Fonte: <https://susanasarmento22.files.wordpress.com/2010/09/ggg.png>, 2024

Em seguida, ainda no material impresso, pediremos para que os alunos possam colorir um quadro (ver Quadro 3) de acordo com as cores descritas por cada número.

Quadro 3 - Malha quadriculada a ser colorida

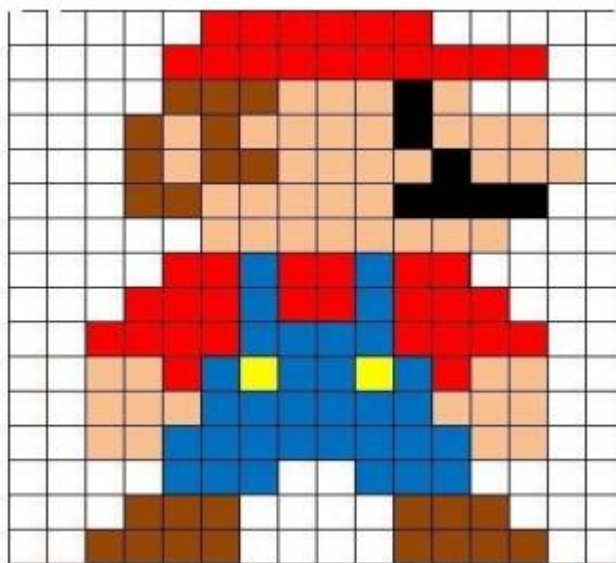
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	4	4	4	2	2	5	2	0	0	0	0	0
0	0	0	4	2	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0	0
0	0	0	4	2	4	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0
0	0	0	0	4	2	2	2	2	5	5	5	5	0	0	0
0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	3	1	1	3	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	3	1	1	3	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	0	0
0	0	2	2	1	3	6	3	3	6	3	1	2	2	0	0
0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	0	0
0	0	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	0	0
0	0	0	0	3	3	3	0	0	3	3	3	0	0	0	0
0	0	0	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	0	0	0
0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0

Fonte: Autores

- 0 – Branco;
- 1 – Vermelho;
- 2 – Rosa claro;
- 3 – Azul;
- 4 – Marrom;
- 5 – Preto;
- 6 – Amarela.

A imagem esperada está presente na Figura 11.

Figura 11 - Malha quadriculada já preenchida



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/255790453816164770/>, 2024

Depois de pintar as células, os alunos devem responder às questões:

- 1) Localize uma célula pintada de cada cor (branco, vermelho, rosa claro, marrom, preto e amarelo) e escreva instruções para encontrá-la.
- 2) Existe alguma maneira padronizada para dar tais instruções? Em caso afirmativo diga qual, e em caso negativo, diga no que este padrão poderia contribuir.

O intuito dessa segunda parte da atividade é o de evidenciar aos estudantes a necessidade de padronização da notação utilizada para uma posição específica da tabela. Ainda sem comentar sobre matrizes, os professores irão apresentar e recomendar a notação mais utilizada: numerar linhas de cima para baixo começando no número 1, numerar colunas da esquerda para a direita começando também no número 1. Além disso, encorajaremos os estudantes a primeiro falar a linha em que um elemento se encontra, e depois a sua coluna, para que a notação a_{ij} seja mais fácil.

Depois desta atividade inicial, vamos trabalhar alguns problemas contextualizados para construção de matrizes com dados reais.

Exercício 1 – Ao final do ano letivo, Alice, Ricardo, Emanuel e Leticia estavam conversando sobre suas notas das provas de Matemática em cada trimestre, em que cada prova foi feita em trimestres diferentes. Alice ficou com 7,5 na primeira prova, 8,0 na segunda e 9,0 na terceira. Já Ricardo tirou 6,5; 7,0 e 8,5 na primeira, segunda e terceira provas, respectivamente, enquanto Emanuel ficou com 8,0; 7,5 e 7,0. Por último, Leticia tirou 9,0; 8,5 e 8,0.

De que maneira podemos organizar estas notas para que seja mais fácil entender estes dados?

Comentários: partindo da introdução que fizemos com o exercício de pixels, esperamos que os alunos sejam capazes de organizar os dados em forma de quadro, o que levará consequentemente a uma matriz. Assim introduziremos como as matrizes podem estar presentes no nosso dia a dia.

Quadro 4 - Nota correspondente as três provas

Aluno	Prova 1	Prova 2	Prova 3
Alice	7,5	8,0	9,0
Emanuel	8,0	7,5	7,0
Letícia	9,0	8,5	8,0
Ricardo	6,5	7,0	8,5

Fonte: Autores

Definição (matrizes): Dados dois números, m e n , naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Exemplos:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2×3 .

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz 3×1 .

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz 3×3 .

Tipos de matrizes:

- Matriz linha: formada apenas por uma linha.

Exemplo: $A = [3 \quad 1 \quad 1 \quad 2]$

- Matriz coluna: formada apenas por uma coluna.

Exemplo: $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Matriz nula: formada por elementos iguais a zero.

Exemplo: $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Matriz quadrada: formada pelo mesmo número de linhas e colunas

Exemplos: $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

- Matriz identidade: ocorre quando os elementos da diagonal principal (onde em a_{ij} temos $i = j$) são todos iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero.

Exemplo: $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definição (igualdade de matrizes): Duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Isso significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser de mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais).

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

Exercício 2 – Ainda se referindo às notas de Alice, Ricardo, Emanuel e Letícia, sabemos que a nota final de cada trimestre é calculada pela média aritmética da nota da prova e da nota do trabalho. Quais serão todas as notas finais dos 4 alunos? Considere o seguinte quadro com os dados das notas dos alunos nos trabalhos de cada trimestre:

Quadro 5 - Nota referente aos três trabalhos

Aluno	Trabalho 1	Trabalho 2	Trabalho 3
Alice	8,0	9,0	8,0
Emanuel	6,5	7,5	8,0
Letícia	10,0	8,0	8,5
Ricardo	5,5	8,0	6,5

Fonte: Autores

Com este exercício, poderemos explicar sobre a soma de matrizes (soma das notas das provas com os trabalhos). Usando a matriz resultado da soma, vamos dividir todas as entradas por 2, o que representa multiplicar a matriz por $\frac{1}{2}$. Sendo assim, também explicaremos a multiplicação de uma matriz por escalar de forma intuitiva, partindo das concepções dos alunos para definir as duas operações com matrizes

Definição (soma e subtração de matrizes): dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j .

Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B . Isso vale para a subtração também.

Definição (multiplicação de número por matriz): dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e todo j . Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A multiplicados por k .

Exercício 3 – Uma organização não governamental (ONG) oferece mensalmente alimentos a dois abrigos. Para o abrigo 1, são doados 25kg de arroz, 20kg de feijão, 30kg de carne e 32kg

de batata. Para o abrigo 2, são doados 30kg de arroz, 24kg de feijão, 35kg de carne e 38kg de batata. Uma equipe é responsável por fazer a cotação de preços por kg, em reais, em dois supermercados e realizar as compras.

Quadro 6 - Preço dos alimentos em dois mercados distintos

Alimentos (1 kg)	Supermercado 1	Supermercado 2
Arroz	5,10	4,80
Feijão	6,30	8,50
Carne	16,50	23,90
Batata	4,60	3,80

Fonte: Autores

Em qual supermercado a ONG deve realizar as comprar para obter o maior rendimento possível?

Comentários: Os alunos serão orientados a montarem uma tabela com os alimentos necessários para cada abrigo. Com ambas as tabelas, espera-se que os estudantes interpretem os dados corretamente e façam os cálculos necessários para se chegar no resultado. Após isso, iremos auxiliá-los discentes a escrever ambas as tabelas na forma de duas matrizes: a matriz A representando a quantidade de alimentos a ser comprada para os dois abrigos e a B , representando os preços dos alimentos cotados nos dois mercados.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 30 & 32 \\ 30 & 24 & 35 & 38 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5,10 & 4,80 \\ 6,30 & 8,50 \\ 16,50 & 23,90 \\ 4,60 & 3,80 \end{bmatrix}$$

Com as matrizes feitas, mostraremos que o produto dessas duas matrizes resultará em uma matriz $C_{2 \times 2}$ com colunas representando os supermercados e linhas informando os valores gastos para cada abrigo.

Para isso, evidenciaremos que cada elemento da matriz C corresponde a uma relação entre uma linha de A e uma coluna de B . Sendo assim, o primeiro elemento da matriz C , denominado c_{11} , será

$$25 \times 5,10 + 20 \times 6,30 + 30 \times 16,50 + 32 \times 4,60 = 895,70$$

Essa relação é uma soma dos produtos dos elementos da linha 1 da matriz A e da coluna 1 da matriz B e nos retorna o valor total dos alimentos do supermercado 1 para o abrigo 1. Fazendo as contas:

Alimentos para abrigo 1:

Supermercado 1:

$$25 \times 5,10 + 20 \times 6,30 + 30 \times 16,50 + 32 \times 4,60 = 895,70$$

Supermercado 2:

$$25 \times 4,80 + 20 \times 8,50 + 30 \times 23,90 + 32 \times 3,80 = 1128,60$$

Alimentos para o abrigo 2:

$$\text{Supermercado 1: } 30 \times 5,10 + 24 \times 6,30 + 35 \times 16,50 + 38 \times 4,60 = 1056,50$$

$$30 \times 5,10 + 24 \times 6,30 + 35 \times 16,50 + 38 \times 4,60 = 1056,50$$

$$\text{Supermercado 2: } 30 \times 4,80 + 24 \times 8,50 + 35 \times 23,90 + 38 \times 3,80 = 1328,90$$

$$30 \times 4,80 + 24 \times 8,50 + 35 \times 23,90 + 38 \times 3,80 = 1328,90$$

Obtendo-se a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 895,70 & 1128,60 \\ 1056,50 & 1328,90 \end{bmatrix}$$

Que pode ser interpretada no Quadro 4.

Quadro 7 - Resultado dos dois mercados

	Supermercado 1	Supermercado 2
Abrigo 1	R\$895,70	R\$1.128,60
Abrigo 2	R\$1.056,50	R\$1.328,90

Fonte: Autores

Comparando as somas das colunas, temos:

$$895,70 + 1056,50 = 1952,20$$

$$2457,50 - 1952,20 = 505,30$$

$$1128,60 + 1328,90 = 2457,50$$

Logo, se a ONG optar por comprar no supermercado 1, ela economizará 505,30 reais.

Comentários: Como não é toda matriz que pode ser multiplicada com outra, sendo necessário satisfazer a condição de existência para tal operação. A matriz A deve possuir a mesma quantidade de linhas que as colunas da matriz B e resultado será uma matriz com tantas linhas quanto a matriz A e tantas colunas quanto a matriz B .

Definição (produto de matrizes): dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum a_{ij} \cdot b_{jk}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$

Observações:

- a) Só existe o produto AB se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B .
- b) A matriz produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B .
- c) O procedimento para determinar cada elemento da matriz se dá tomando-se cada elemento da linha i da matriz A com cada elemento da coluna k da matriz B , multiplica-se elemento a elemento e obtém-se a soma de cada produto de elementos.
- d) Se A e B são matrizes quadradas, então é possível fazer tanto o produto AB quanto BA . Entretanto, no geral, $AB \neq BA$. Ou seja, para matrizes, a ordem dos fatores ALTERA os produtos.

Exercício 4 – Resolva a equação matricial $X - A - B = C$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício 5 – Calcule as matrizes $2A$, $\frac{1}{3}B$ e $\frac{1}{2}(A + B)$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercício 6 – Calcule os seguintes produtos

- a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
- b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 7 – (Enem 2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas do quadro formavam uma matriz 4×4 , e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e o quadro que ele conseguiu é mostrada a seguir.

Quadro 5 - Notas obtidas pelo aluno

	1º bimestre	1º bimestre	1º bimestre	1º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Fonte: Enem questão 178 da prova amarela, 2012

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por

$$A) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$C) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$E) \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Exercício 8 – (UEPA 2012) O cálcio é essencial para a transmissão nervosa, coagulação do sangue e contração muscular; atua também na respiração celular, além de garantir uma boa formação e manutenção de ossos e dentes. A tabela 1 abaixo mostra que a ingestão diária recomendada de cálcio por pessoa varia com a idade.

Quadro 8 - Consumo ideal de cálcio por dia

Idade	Cálcio(mg/dia)
4 a 8 anos	800
9 a 13 anos	1300
14 a 18 anos	1300
19 a 50 anos	1000

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cálcio>. Acesso em 13 set. 2024

Foi por essa importância que o cálcio tem para o corpo humano que a diretora de uma escola resolveu calcular a quantidade de cálcio que teria de usar nas refeições diárias dos seus alunos para suprir tal necessidade. A tabela 2 abaixo mostra a quantidade de alunos por idade existente nessa escola.

Quadro 9 - Idade em relação a quantidade de alunos

Idade	Alunos
4 a 8 anos	60
9 a 13 anos	100
14 a 18 anos	80
19 a 50 anos	40

Fonte: UEPA, Prosel 2012 - 3º etapa, questão 30

A quantidade diária de cálcio, em mg, que teria que usar nas refeições desses alunos é:

- a) 286.000
- b) 294.000
- c) 300.000
- d) 310.000
- e) 322.000

Exercício 9 – Utilizando a tabela de notas de Alice, Letícia, Emanuel e Ricardo, dos exercícios 1 e 2, suponha que o professor, para ajudar a aumentar a média da turma, decidiu colocar pesos diferentes para as notas de cada trimestre. Para a primeira nota, o peso foi 2, para a segunda 3 e para a terceira 4. Quais foram as médias finais do ano letivo para cada aluno?

Determinantes

O determinante é um número associado a uma matriz que pode ser usado para resolução de sistemas lineares; verificar se três pontos estão alinhados no plano cartesiano, no estudo de campos elétricos, entre outros exemplos. Calculamos determinantes somente de matrizes quadradas.

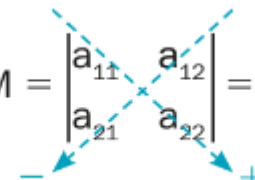
Definição (determinante): Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos determinante da matriz M (e indicamos por $\det M$) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

- 1- Se M é de ordem 1 então $\det M$ é o único elemento de M .

$$M = (a_{11}) \Rightarrow \det M = a_{11}$$

Exemplo: $M = [6] \Rightarrow \det M = 6$

- 2- Se M é de ordem 2 (ou seja, é uma matriz de ordem 2×2), então $\det M$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


Exemplo:

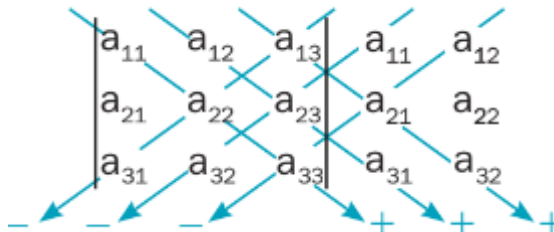
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4(-1) = 10$$

- 3- Se M é de ordem 3, definimos

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Por meio da regra de Sarrus é possível memorizar esta definição para calcular o determinante da seguinte forma:

- Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.
- Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal.
- Os termos precedidos pelo sinal (-) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária.



Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 80 - (8 - 12 + 30) = 49$$

Exercício 10 – Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

Exercício 11 – Determine x tal que:

$$\begin{vmatrix} 2x & 3x + 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Exercício 12 – (UEL) A soma dos determinantes indicados a seguir é igual a zero

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$$

- A) quaisquer que sejam os valores reais de a e de b.
- B) se e somente se $a = b$.
- C) se e somente se $a = -b$.
- D) se e somente se $a = 0$.
- E) se e somente se $a = b = 1$.

Apostila – Matrizes e Determinantes

Você conhece o significado dos valores 144p, 240p, 360p, 480p, 720p e 1080p?



Quadro para ser colorido:

0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	4	4	4	2	2	5	2	0	0	0	0	0
0	0	0	4	2	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0	0
0	0	0	4	2	4	4	2	2	2	5	2	2	2	0	0
0	0	0	0	4	2	2	2	2	5	5	5	5	0	0	0
0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	3	1	1	3	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	3	1	1	3	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	3	3	3	3	1	1	1	1	0	0
0	0	2	2	1	3	6	3	3	6	3	1	2	2	0	0
0	0	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	2	2	0	0
0	0	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	0	0
0	0	0	0	3	3	3	0	0	3	3	3	0	0	0	0
0	0	0	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0
0	0	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	4	4	0	0

0 – Branco; 1 – Vermelho; 2 – Rosa claro; 3 – Azul; 4 – Marrom; 5 – Preto; 6 – Amarela.

- 1) Localize uma célula pintada de cada cor (branco, vermelho, rosa claro, marrom, preto e amarelo) e escreva instruções para encontrá-la.
- 2) Existe alguma maneira padronizada para dar tais instruções? Em caso afirmativo diga qual, em caso negativo, diga no que este padrão poderia contribuir.

Exercício 1 – Ao final do ano letivo, Alice, Ricardo, Emanuel e Letícia estavam conversando sobre suas notas das provas de matemática em cada trimestre, em que cada prova foi feita em trimestres diferentes. Alice ficou com 7,5 na primeira prova, 8,0 na segunda e 9,0 na terceira. Já Ricardo tirou 6,5; 7,0 e 8,5 na primeira, segunda e terceira provas, respectivamente, enquanto Emanuel ficou com 8,0; 7,5 e 7,0. Por último, Letícia tirou 9,0; 8,5 e 8,0. De que maneira podemos organizar estas notas para que seja mais fácil entender estes dados?

Definição (matrizes): Dados dois números, m e n , naturais e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

Tipos de matrizes:

- Matriz linha: formada apenas por uma linha.
- Matriz coluna: formada apenas por uma coluna.
- Matriz nula: formada por elementos iguais a zero.
- Matriz quadrada: formada pelo mesmo número de linhas e colunas
- Matriz identidade: ocorre quando os elementos da diagonal principal (onde em a_{ij} temos $i = j$) são todos iguais a 1 e os outros elementos são iguais a zero.

Definição (igualdade de matrizes): Duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e todo $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Isso significa que, para serem iguais, duas matrizes devem ser de mesma ordem e apresentar todos os elementos correspondentes iguais (elementos com índices iguais).

Exemplo:
$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício 2 – Ainda se referindo às notas de Alice, Ricardo, Emanuel e Letícia, sabemos que a nota final de cada trimestre é calculada pela média aritmética da nota da prova e da nota do trabalho. Quais serão todas as notas finais dos 4 alunos? Considere a seguinte tabela com os dados das notas dos alunos nos trabalhos de cada trimestre:

Aluno	Trabalho 1	Trabalho 2	Trabalho 3
Alice	8,0	9,0	8,0
Emanuel	6,5	7,5	8,0
Letícia	10,0	8,0	8,5
Ricardo	5,5	8,0	6,5

Definição (soma e subtração de matrizes): dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo i e todo j . Isso significa que a soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B . Isso vale para a subtração também.

Definição (multiplicação de número por matriz): dado um número k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se produto kA a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ para todo i e todo j . Isso significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A multiplicados por k .

Exercício 3 – Uma organização não governamental (ONG) oferece mensalmente alimentos a dois abrigos. Para o abrigo 1, são doados 25kg de arroz, 20kg de feijão, 30kg de carne e 32kg de batata. Para o abrigo 2, são doados 30kg de arroz, 24kg de feijão, 35kg de carne e 38kg de batata. Uma equipe é responsável por fazer a cotação de preços por kg, em reais, em dois supermercados e realizar as compras.

Cotação de preços

Alimentos (1 kg)	Supermercado 1	Supermercado 2
Arroz	5,10	4,80
Feijão	6,30	8,50
Carne	16,50	23,90
Batata	4,60	3,80

Em qual supermercado a ONG deve realizar as comprar para obter o maior rendimento possível?

Definição (produto de matrizes): dadas duas matrizes, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$, chama-se produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum a_{ij} \cdot b_{jk}$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$

Observações:

- Só existe o produto AB se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B .
- A matriz produto AB é uma matriz que tem o número de linhas de A e o número de colunas de B .
- O procedimento para determinar cada elemento da matriz se dá tomando-se cada elemento da linha i da matriz A com cada elemento da coluna k da matriz B , multiplica-se elemento a elemento e obtém-se a soma de cada produto de elementos.

Exercício 4 – Resolva a equação matricial $X - A - B = C$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício 5 – Calcule as matrizes $2A$, $\frac{1}{3}B$ e $\frac{1}{2}(A + B)$, sendo dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

Exercício 6 – Calcule os seguintes produtos

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 7 – (UEPA 2012) O cálcio é essencial para a transmissão nervosa, coagulação do sangue e contração muscular; atua também na respiração celular, além de garantir uma boa formação e manutenção de ossos e dentes. A tabela 1 abaixo mostra que a ingestão diária recomendada de cálcio por pessoa varia com a idade.

Idade	Cálcio(mg/dia)
4 a 8 anos	800
9 a 13 anos	1300

14 a 18 anos	1300
19 a 50 anos	1000

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cálcio>. Acesso em 13 set. 2024

Foi por essa importância que o cálcio tem para o corpo humano que a diretora de uma escola resolveu calcular a quantidade de cálcio que teria de usar nas refeições diárias dos seus alunos para suprir a essa necessidade. A tabela 2 abaixo mostra a quantidade de alunos por idade existente nessa escola.

Idade	Alunos
4 a 8 anos	60
9 a 13 anos	100
14 a 18 anos	80
19 a 50 anos	40

Fonte: UEPA, Prosel 2012 - 3º etapa, questão 30

A quantidade diária de cálcio, em mg, que teria que usar nas refeições desses alunos é:

- a) 286.000
- b) 294.000
- c) 300.000
- d) 310.000
- e) 322.000

Exercício 8 – Utilizando a tabela de notas de Alice, Letícia, Emanuel e Ricardo, do exercício 1 e 2, suponha que o professor, para ajudar a aumentar a média da turma, decidiu colocar pesos diferentes para as notas de cada trimestre. Para a primeira nota, o peso foi 2, para a segunda 3 e para a terceira 4. Quais foram as médias finais do ano letivo para cada aluno?

Determinantes

O determinante é um número associado a uma matriz que pode ser usado para resolução de sistemas lineares, verificar se três pontos estão alinhados no plano cartesiano, no estudo de campos elétricos, entre outras aplicações. Calculamos determinantes somente de matrizes quadradas.

Definição (determinante): Consideremos o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais. Seja M uma matriz de ordem n desse conjunto. Chamamos determinante da matriz M (e indicamos por $\det M$) o número que podemos obter operando com os elementos de M da seguinte forma:

1- Se M é de ordem 1 então $\det M$ é o único elemento de M .

$$M = (a_{11}) \Rightarrow \det M = a_{11}$$

Exemplo: $M = [6] \Rightarrow \det M = 6$

- 2- Se M é de ordem 2 (ou seja, é uma matriz de ordem 2×2), então $\det M$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 3- Se M é de ordem 3, o determinante pode ser calculado pelo método de Sarrus:

- Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas.
- Os termos precedidos pelo sinal (+) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal.
- Os termos precedidos pelo sinal (-) são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal secundária.

Exercício 9 – Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ R: $\frac{5}{2}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ R: -28

Exercício 10 – Determine x tal que:

$$\begin{vmatrix} 2x & 3x + 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$x = 2, -\frac{1}{2}$$

Exercício 11 – (UEL) A soma dos determinantes indicados a seguir é igual a zero

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$$

- quaisquer que sejam os valores reais de a e de b .
- se e somente se $a = b$.
- se e somente se $a = -b$.
- se e somente se $a = 0$.

E) se e somente se $a = b = 1$

Tarefa de Casa

1) (Enem 2012) Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4×4 e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e o quadro que ele conseguiu é mostrada a seguir:

	1º bimestre	1º bimestre	1º bimestre	1º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida desse quadro por

A) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 4 \\ \frac{1}{4} \\ 4 \\ \frac{1}{4} \\ -4 \end{bmatrix}$

2- (UFRGS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados em um restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3 .

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{matrix}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3 é:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

Referências

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. J.; ROBERTO, P. **Prisma matemática: sistemas, matemática financeira e grandezas: ensino médio: área do conhecimento: matemática e suas tecnologias – 1**, ed - São Paulo: Editora FTD, 2020.

EXERCÍCIOS CONTEXTUALIZADOS DE PRODUTO DE MATRIZES. Produção de Alenúmeros. 2024. (19 min.), son., color. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=WZdbiMUmEvE>. Acesso em: 08 ago. 2024.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Exercícios sobre determinantes**. 2022. Disponível em: <https://exercicios.brasilecola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-determinantes.htm>. Acesso em: 06 ago. 2024.

RIBEIRO, D. M.; ARAUJO, L. C.; OLIVEIRA, E. S. de; CARISSIMI, A.; RIBEIRO, E. C. Uma abordagem de matrizes na perspectiva de resolução de problemas. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, [S. l.], v. 3, n. 3, p. 854–869, 2019. DOI: 10.33238/ReBECCEM.2019.v.3.n.3.22794. Disponível em: <https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/22794>. Acesso em: 8 ago. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 14 de setembro

No terceiro dia de aula havia 17 alunos presentes, dos quais a maioria chegou após alguns minutos do horário de início da aula e o assunto previsto para ser tratado nesse dia foi Matrizes e determinantes. A aula iniciou com a resolução da lista de tarefas da aula anterior, sendo disponibilizado 5 a 10 minutos para sua resolução. Os professores estagiários pediram para os alunos mostrarem quais das perguntas eles possuíam mais dúvidas, e eles indicaram o exercício 3. Esse exercício pedia o cálculo da variância, o que não foi tratado na aula passada por falta de tempo. Os professores explicaram o que era variância e desvio padrão para os alunos e responderam no quadro a questão.

As 3 atividades previstas para introduzir matrizes e trabalhar com algumas operações demoraram bem mais do que os professores estagiários planejaram. A primeira atividade, em que era necessário colorir e responder 2 questões em relação ao desenho de um personagem famoso, teve a maior disparidade de tempo. Os alunos mostraram bastante interesse nessa atividade, e com ele veio uma grande demora (não planejada) para pintar todas as células. Quando foi perguntado aos alunos como eles responderam às duas questões (cujo objetivo era ajudar os alunos a ponderarem sobre como identificar células e se existe uma maneira padronizada de se dar instruções para localizar esta célula), eles responderam 4 diferentes métodos, sendo um deles o sistema utilizado no jogo Batalha Naval ou Xadrez, em que as linhas são letras e as colunas são números. Os outros 3 métodos são variações desse sistema, com números nas linhas e letras na coluna, letras nas linhas e colunas e números em ambas. Os professores estagiários, ao discutirem a definição de matriz, mencionaram que na Matemática é utilizado apenas números em ambos, pelo fato de que o alfabeto é finito, e assim, em problemas grandes, seria necessário definir outros elementos. Como a primeira atividade ocupou muito tempo da aula, o primeiro horário acabou quando os alunos iniciaram o segundo exercício da apostila.

No segundo horário, os alunos conseguiram terminar a resolução do segundo exercício e os professores estagiários fizeram a correção no quadro. Os alunos entenderam rapidamente o algoritmo que é feito para a soma e multiplicação de um número por matriz, com apenas um deles em dúvida se era sempre necessário fazer uma média entre os dois quando se adiciona matrizes. Os professores falaram que essa média era específico desse exercício, em que era solicitado realizar a média entre as notas. No terceiro exercício, que era introdutório de multiplicação de matrizes, os professores estagiários notaram que os alunos conseguiram responder de maneiras diferentes do planejado, com alguns deles primeiramente somando os

quilos de ambos os abrigos para multiplicar pelo preço dos dois mercados. Assim, em vez de fazer uma multiplicação de matriz 2×4 com 4×2 , com a multiplicação dos quilos separadamente, a maioria fez uma matriz 1×4 vezes 4×2 , sendo essa matriz 1×4 a dos quilos de ambos os abrigos somados. Esse cálculo resultava em uma matriz 1×2 , com os elementos sendo os valores totais que a ONG gastaria nos dois supermercados. Os professores, ao definirem a multiplicação entre matrizes discutiram os dois pensamentos. Em relação às dúvidas sobre o problema, um aluno pensou que apenas somar os preços e comparar as duas somas seria o suficiente para achar o mais caro. Os professores comentaram que é necessário utilizar a variável dos quilos, visto que ela poderia alterar o valor final dos produtos.

Faltando vinte minutos para a aula acabar, os professores pediram para os alunos resolverem os exercícios que trabalhavam o que foi ensinado durante aula. Durante esses exercícios, os alunos confundiram a ordem da multiplicação (linha x coluna) para fazer o produto de matrizes. Os professores estagiários reforçaram que a ordem durante a multiplicação de matrizes importa, sendo que é uma operação não comutativa.

Pela falta de tempo, foi decidido que não seria trabalhado determinantes nessa aula e os últimos minutos dela foram utilizados para resolverem os exercícios de fixação. Com o uso de um tempo grande para os 3 exercícios iniciais, os professores estagiários refletiram que teria sido melhor se tivessem feitos problemas mais enxutos e simples, para que os alunos tivessem mais tempo para fazerem os exercícios contextualizados que utilizavam operações de matrizes, podendo-se até ter tempo para definir determinante.

2.4 AULA 04 – Sistemas Lineares I (21/09)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Sistemas Lineares

- Equação Linear
- Sistema com uma ou mais incógnitas

Objetivo Geral:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com sistemas lineares, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar o que é um sistema linear.
- Identificar os diferentes tipos de sistemas lineares.
- Resolver sistemas de equações lineares 2×2 e 3×3 , seja pelo método da substituição ou pelo método da soma.
- Reconhecer, por meio da construção de gráficos, a solução de sistemas 2×2 .

Recursos Didáticos: Slides, apostila produzida pelos autores, quadro, giz, lista de exercícios impressa.

Introdução

Iniciaremos as atividades com a retomada do conteúdo da última aula, perguntando a eles se tiveram alguma dúvida para resolver as listas e se teriam algum exercício para que os professores resolvessem no quadro.

Após esse período, vamos apresentar o exercício inicial para sistemas lineares.

Exercício 1 (REMat - Adaptado) – Seu Cláudio é um agricultor, tem seu sítio, com suas plantações de feijão e um grande açude onde há muitos peixes. O esforço que ele faz trabalhando no campo acaba consumindo muito de sua energia, e dependendo do dia, o corpo humano de um homem necessita de 1800 a 3200 quilocalorias (Kcal) dia.

Seu Cláudio pretende consumir 1880 Kcal por dia, tomando como base somente dois alimentos: feijão e peixe. Então ele tirou as seguintes conclusões

- 100g de feijão equivalem a 330Kcal $1g = 3,3$
- 100g de peixe equivalem a 70Kcal $1g = 0,7$

O que ele pode fazer para que atinja a meta de consumir 1880 quilocalorias?

Comentários: iremos incentivar os estudantes a calcularem quantas calorias há em uma única grama de cada alimento. Com isso, será possível montar a equação $3.3x + 0.7y = 1880$, na qual as incógnitas x e y representam o peso, em gramas, de feijão e peixe respectivamente. Tentaremos nortear a ideia para gerar um gráfico; ou montar um conjunto com as soluções.

Ao finalizar a atividade vamos definir os conceitos de equação linear com duas ou mais incógnitas analisando as infinitas soluções possíveis.

Definição (Equação Linear): Uma equação de uma ou mais incógnitas é chamada de linear quando todas as variáveis têm expoente 1 e não há multiplicação nem divisão entre variáveis. A representação geral desse tipo de equação é dada por:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Em que x_1, x_2, \dots, x_n são **incógnitas**, a_1, a_2, \dots, a_n são constantes reais chamadas de **coeficientes** da equação e b é uma constante real.

Exemplos:

- a) $3,3x + 0,7y = 180$ é uma equação linear com coeficientes 3,3 e 0,7 e incógnitas x e y .
- b) $3x + 2y = 11$ é uma equação linear com coeficientes 3 e 2 e incógnitas x e y .
- c) $8x - y + 3z = -1$ é uma equação linear com coeficientes 8, -1 e 3 e incógnitas x , y e z .
- d) $3x^2 + 2 = 1$ não é uma equação linear, pois é do 2º grau em relação a x .
- e) $\frac{1}{x} + 3y = 8$ não é uma equação linear, pois o expoente de x é -1.

Em seguida vamos ter a continuação da questão anterior:

Exercício 1.1 – Seu Cláudio percebeu que haveria muitas opções e resolveu de uma vez que gostava de comer mais peixe que feijão, por isso disse

- O que comer de feijão, comerei o dobro de peixe.

Seguindo a mesma margem de 1880Kcal diárias, quais serão as possíveis soluções para esse cardápio?

Comentários: Promover que os alunos tentem resolver, ajudando-os a verem como estas duas informações agora são ligadas para encontrar a solução do problema. Instruir para que montem um novo gráfico, no mesmo eixo de plano cartesiano construído no exercício anterior para verificarem a resolução gráfica do problema.

Definição (sistema linear): Um sistema linear de m equações e n incógnitas (com $m \geq 1$ e $n \geq 1$) é um conjunto de equações simultâneas da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que

- $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes;
- b_i são os termos independentes.

Método da eliminação (soma):

Vamos começar com um sistema linear simples, com mesmo número de equações e incógnitas, ou seja, n equações e n incógnitas. Por exemplo, para $n = 2$ considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 & (i) \\ 3x + 5y = 7 & (ii) \end{cases}$$

Nesse caso, as incógnitas são x e y . Uma maneira simples para resolver esse sistema é através da **eliminação**:

1) Subtraindo 3 vezes a primeira equação da segunda equação, eliminamos a incógnita x da segunda equação e ficamos com uma equação linear somente em y :

$$(equação ii) - 3(equação i) \Rightarrow 0x - y = -2$$

De onde obtemos $y = 2$.

2) Agora, basta substituir o valor encontrado de y na primeira equação, por exemplo:

$$1x + 2y = 3 \Rightarrow 1x + 2(2) = 3 \Rightarrow x = 3 - 4 \Rightarrow x = -1$$

Assim, encontramos um par $(x, y) = (-1, 2)$ que satisfaz ambas as equações, portanto são soluções do sistema.

Exercício 2 - Sabe-se x e y são as incógnitas do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 1y = 2 \end{cases}$$

Qual é o produto de x e y ?

Solução:

$$x + 2y - (x - y) = 4 - 2 \rightarrow 3y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{3}$$

$$x + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \rightarrow x = 4 - \frac{4}{3} \rightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$x \times y = \frac{8}{3} * \frac{2}{3} = \frac{16}{9}$$

Exercício 3- Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Comentários do exercício: para encontrar o conjunto solução desse sistema, vamos realizar a subtração da primeira equação com a segunda obtendo

$$\begin{aligned} x + 2y - (x + y) &= 5 - 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo o y na segunda linha temos

$$\begin{aligned} x + 1 &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Assim, encontramos o conjunto solução $\{3,1\}$. Esse conjunto é solução das duas equações ao mesmo tempo e isso significa que esse sistema tem uma solução possível, e é o par $x = 3$ e $y = 1$. Após encontrar essa solução, será mostrado novamente aos alunos como utilizar gráficos para visualizar a solução do sistema. Para a construção das duas retas que irão se interceptar no ponto $(3,1)$, faremos o uso de duas tabelas para organizar pontos que são soluções de cada uma das equações. Para a primeira tabela, utilizaremos a primeira equação:

$$x + 2y = 5$$

Tabela 1: Tabela de valores

x	y
1	2
2	1,5
3	1

Fonte: Autores

Após isso, vamos repetir o mesmo feito para a segunda equação e encontrar os respectivos valores de y

$$x + y = 4$$

Tabela 2: Tabela de valores

x	y
1	3
2	2
3	1

Fonte: Autores

Assim, vamos marcar os pontos no plano cartesiano, os quais estarão alinhados no plano. Será feita uma discussão para esclarecer que os gráficos de ambas as equações serão de fato retas. Com base no fato de que pontos que pertencem a uma reta são soluções da equação associada a ela, levaremos os alunos a entenderem que o ponto de interseção, que faz parte de ambas as retas, soluciona ambas as equações.

Teremos o primeiro contato com os possíveis resultados de um sistema

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Figura 12 - Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

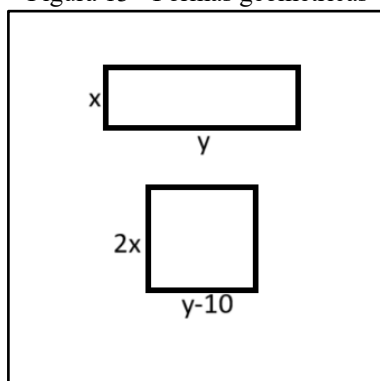
- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Fonte: Autores

Exercício – Sistema de duas incógnitas:

- Represente por uma expressão o perímetro P de cada uma das figuras abaixo.
- Para quais valores de x e y ambas as figuras abaixo têm um perímetro igual a 100?

Figura 13 - Formas geométricas



Fonte: Autores

Solução a):

$$P_1 = 2x + 2y$$

$$P_2 = 4x + 2y - 20$$

Solução b):

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ 4x + 2y - 20 = 100 \end{cases}$$

Reescrevendo a segunda equação

$$\begin{cases} 2x + 2y = 100 \\ 4x + 2y = 120 \end{cases}$$

Fazendo o método da soma, temos: $x = 10$, $y = 40$.

Exercício (UEL-PR) Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando R\$4.300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R\$50,00 e cada calça de tamanho médio custou R\$60,00. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?

Comentários: Podemos resolver montando o sistema

$$\begin{cases} p + m = 80 \\ 50p + 60m = 4300 \end{cases}$$

Fazendo

$$(equação 2) - 50(equação 1) \Rightarrow 10m = 300 \Rightarrow m = 30$$

Substituindo na equação 1,

$$p + 30 = 80 \Rightarrow p = 50$$

Assim, foram compradas 50 calças tamanho pequeno e 30 calças tamanho médio.

Em seguida, vamos utilizar este mesmo exercício para explicar o método da substituição:

Método da substituição:

Dado um sistema qualquer

$$\begin{cases} p + m = 80 \\ 50p + 60m = 4300 \end{cases}$$

Uma outra forma de resolvê-lo é pelo método de substituição, que consiste em:

1) Isolar uma das incógnitas em uma das equações

$$p = 80 - m$$

2) Substituir o valor encontrado no passo 1) na segunda equação

$$50(80 - m) + 60m = 4300$$

$$4000 - 50m + 60m = 4300$$

$$10m = 4300 - 4000$$

$$m = 30$$

3) Substituir o valor da incógnita encontrada na primeira equação

$$p + 30 = 80$$

$$p = 50$$

(Exercício Vestibular Univesp 2021 - Questão 04) Uma loja colocou copos e canecas em promoção, no total de 80 peças. No primeiro dia de promoção, foi vendido $\frac{1}{5}$ do número de copos e $\frac{1}{9}$ do número de canecas, totalizando 12 peças. Qual foi o número de copos não vendidos nesse dia?

Solução: montar o sistema

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{9} = 12 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, temos:

$$\frac{80 - y}{5} + \frac{y}{9} = 12$$

Resolvendo esta equação,

$$720 - 9y + 5y = 540$$

Assim,

$$-4y = -180$$

$$y = 45$$

Substituindo na primeira equação, temos que $x = 35$

E encontramos o número de copos total, mas queremos saber quantos copos não foram vendidos. Fazendo de modo que a diferença, encontramos que o número de copos vendidos foi de $\frac{35}{5} = 7$, então o número de copos não vendidos foi de 28.

Sistema de três incógnitas

Exercício: Maria quer se preparar para o vestibular focando nas suas três matérias específicas, Matemática, Física e Química. Ela quer estudar 30 horas por semana, distribuídas entre as três matérias. Além disso, ela quer seguir os seguintes critérios:

- Ela precisa dedicar o dobro do tempo de estudo em Matemática do que em Física.
- A soma do tempo de estudo em Física e Química deve ser igual ao tempo que ela dedica a Matemática.

Ajude Maria a determinar quantas horas por semana ela deve dedicar a cada matéria para seguir seu planejamento.

Solução: Seja x as horas de estudo de Matemática, y de Física e z de Química.

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x = 2y \\ y + z = x \end{cases}$$

Reorganizando o sistema,

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$(equação 1) - (equação 3) \Rightarrow 2x = 30$$

Ou seja,

$$x = 15$$

Substituindo $x = 15$ na equação 2, temos:

$$15 - 2y = 0$$

Daí,

$$2y = 15$$

$$y = 7,5$$

Agora na equação 1, temos

$$15 + 7,5 + z = 30$$

Então,

$$z = 30 - 22,5$$

Assim, $z = 7,5$, com isso concluímos que Maria dedicará 15 horas de estudo em Matemática, 7,5 horas em Física e 7,5 horas em Química.

Outra solução: Observe que poderíamos resolver pelo método da substituição também. Substituindo equação 2 na equação 1 e na 3, teríamos

$$\begin{cases} 2y + y + z = 30 \\ y + z = 2z \\ \begin{cases} 3y + z = 30 \\ -y + z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Assim, $z = y$. Com isso,

$$3z + z = 30$$

$$z = 7,5$$

Logo

$$y = 7,5$$

Substituindo na terceira equação,

$$x + 7,5 + 7,5 = 30$$

Assim,

$$x = 15$$

Exercício 9 – Escreva a equação com duas e três variáveis que representa cada sentença:

- a) A soma de dois números distintos equivale a 14 R: $x + y = 14$
- b) Em um estojo, há 15 objetos, entre lápis e canetas. R: $l + c = 15$
- c) Fui a feirinha e comprei alguns pastéis por R\$ 5,00 cada, alguns sucos por R\$ 3,50 cada um e algumas verduras para minha mãe que cada pacote custava R\$ 8,00 cada. Ao todo paguei R\$ 71,00. R: $5p + 3,5s + 8v = 71$
- d) Em uma prova, para cada questão certa, o estudante recebe +5 pontos e, para cada questão errada ou em branco, ele recebe -3 pontos. Um estudante tirou 12 pontos nessa prova. R: $5a - 3e = 12$

Exercício 10 – Modele um sistema de equação com as situações apresentadas:

- 1- Uma mercearia adquiriu caixas de bombons contando 24 unidades nos sabores chocolate e morango. Cada caixa contém 4 bombons de chocolate a mais do que a quantidade de bombons de morango. Quantos bombons de cada sabor há em cada caixa?

$$\begin{cases} c + m = 24 \\ c = m + 4 \\ c = 14 \\ m = 10 \end{cases}$$

- 2- Gabriela e Lucas juntaram suas economias para comprar uma televisão de R\$ 4 500,00. Gabriela conseguiu juntar o dobro que Lucas. Quanto cada um economizou?

$$\begin{cases} g + l = 4500 \\ g = 2l \\ g = 3000 \\ l = 1500 \end{cases}$$

Atividade Pega-Varetas

Vamos pedir para os alunos se unirem em grupos de 3 alunos para realizar a seguinte atividade:

Num jogo de pega-varetas, a vareta verde vale 1 pontos, a azul 3 pontos, a amarela 5 pontos, a vermelha 15 pontos e a preta 30 pontos. Joguem uma partida e, de acordo com o número de varetas pegadas por cada jogador, formem um sistema linear de três incógnitas para que outro grupo o resolva!

Comentários: Os alunos podem se perguntar como fazer para formar um sistema de apenas três incógnitas se por acaso eles pegarem mais de três cores de varetas. Podemos instruir que eles podem colocar o valor numérico de pontos, para não incluir mais de três incógnitas. Outra dúvida que pode surgir, é se um aluno pegar apenas uma ou duas cores. Podemos salientar que este não será um problema, que um sistema de três incógnitas não necessariamente precisa ter três equações com todas as três incógnitas para ter solução única.

Tarefa de casa

Exercício 1 – Resolva os seguintes sistemas:

- a) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ R: $x = 4, y = 1$
- b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -4 \end{cases}$ R: $x = 3, y = 7$

$$c) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \quad R: x = \frac{7}{2}, y = -\frac{1}{4}$$

Exercício 2 - (ENEM 2021 questão 164) Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg. Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Quadro 10 - Itens da viagem

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Fonte: Enem, questão 164, 2021.

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm mesma massa. Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

- a) 22
- b) 24**
- c) 26
- d) 33
- e) 39

Escrevendo o sistema

$$\begin{cases} 12x + 4y + 3z = 10 & (1) \\ 18x + 3y + 2z = 10 & (2) \\ mx + 2y + z = 10 & (3) \end{cases}$$

Em que m é a quantidade máxima de camisetas. Fazendo pelo método da soma, se multiplica a equação (3) por 3 e subtraindo a equação (1), temos a equação

$$(3m - 12)x + 2y = 20 \quad (4)$$

Multiplicando a equação (3) por 2 e subtraindo a equação (2), temos a equação

$$(2m - 18)x + y = 10$$

Que, ao multiplicar por 2 pode ser reescrita como

$$(4m - 36)x + 2y = 20 \quad (5)$$

Fazendo agora (5)-(4), temos

$$(3m - 12)x = 0$$

$$(4m - 36)x = 0$$

Assim,

$$4m - 36 = 3m - 12$$

$$4m - 3m = -12 + 36$$

$$m = 24$$

É possível levar 24 camisetas no máximo nesta mala.

Exercício 3 – Modele um sistema de equações com a situação descrita:

- a) Marcos e João são irmãos, juntos somam 33 anos, mas Marcos tem o dobro de idade de João, quantos anos cada um tem?

R: João tem 11 anos e Marcos tem 22 anos.

- b) Um pacote de doces sortidos contém três tipos de doces, os quadrinhos, os triangulares e os redondinhos. Na embalagem diz que temos 115 unidades ao total. Ao observar vemos que há 5 quadrinhos a mais que os triangulares. E os redondinhos são o dobro da quantia dos quadrinhos. Qual a quantidade de cada um?

R: Quadrinhos tem 60 unidades e triangulares tem 55 unidades

Exercício 4 – (UFRGS) O sistema de equações

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$$

possui:

- a) Nenhuma solução
b) **Uma solução $x=2, y=-3$**
c) Duas soluções
d) Três soluções
e) Infinitas soluções

Apostila – Sistemas Lineares

Definição (Equação Linear): Uma equação de uma ou mais incógnitas é chamada de linear quando todas as variáveis têm expoente 1 e não há multiplicação nem divisão entre variáveis. A representação geral desse tipo de equação é dada por:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Em que x_1, x_2, \dots, x_n são **incógnitas**, a_1, a_2, \dots, a_n são constantes reais chamadas de **coeficientes** da equação e b é uma constante real.

Exemplos:

- $3,3x + 0,7y = 180$ é uma equação linear com coeficientes 3,3 e 0,7 e incógnitas x e y .
- $3x + 2y = 11$ é uma equação linear com coeficientes 3 e 2 e incógnitas x e y .
- $8x - y + 3z = -1$ é uma equação linear com coeficientes 8, -1 e 3 e incógnitas x, y e z .
- $3x^2 + 2 = 1$ não é uma equação linear, pois é do 2º grau em relação a x .
- $\frac{1}{x} + 3y = 8$ não é uma equação linear, pois o expoente de x é -1.

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Exercício 1.1 – Seu Cláudio percebeu que haveria muitas opções e resolveu de uma vez que gostava de comer mais peixe que feijão, por isso disse

O que comer de feijão, comerei o dobro de peixe.

Seguindo a mesma margem de 1880Kcal diárias, quais serão as possíveis soluções para esse cardápio?

Definição (sistema linear): Um sistema linear de m equações e n incógnitas (com $m \geq 1$ e $n \geq 1$) é um conjunto de equações simultâneas da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em que

- $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes;
- b_i são os termos independentes.

Exercício 2 - Sabe-se x e y são as incógnitas do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 1y = 2 \end{cases}$$

Qual é o produto de x e y?

Exercício 3 – Modele um sistema de equações que represente cada uma das situações apresentadas:

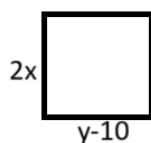
- Uma mercearia adquiriu caixas de bombons contendo 24 unidades nos sabores chocolate e morango. Cada caixa contém 4 bombons de chocolate a mais do que a quantidade de bombons de morango. Quantos bombons de cada sabor há na caixa?
- Gabriela e Lucas juntaram suas economias para comprar uma televisão que custou R\$4.500,00. Gabriela conseguiu juntar o dobro da quantia de Lucas. Calcule quanto cada um economizou.

Exercício 4- Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Exercício 5 – Sistema de duas incógnitas e duas equações:

- Represente por uma expressão o perímetro de cada uma das figuras abaixo.
- Para quais valores de x e y ambas as figuras abaixo têm um perímetro igual a 100?



Exercício 6 (UEL-PR) Um comerciante varejista comprou 80 calças de dois tamanhos diferentes, pequeno e médio, gastando R\$4.300,00. Cada calça de tamanho pequeno custou R\$50,00 e cada calça de tamanho médio custou R\$60,00. Quantas calças de tamanho pequeno e médio, respectivamente, ele comprou?

Exercício 7 (Vestibular Univesp 2021 - Questão 04) Uma loja colocou copos e canecas em promoção, no total de 80 peças. No primeiro dia de promoção, foi vendido $\frac{1}{5}$ do número de copos e $\frac{1}{9}$ do número de canecas, totalizando 12 peças. Qual foi o número de copos não vendidos nesse dia?

Exercício 8 – Sistema de três incógnitas e três equações:

Maria quer se preparar para o vestibular focando nas suas três matérias específicas, matemática, física e química. Ela quer estudar 30 horas por semana, distribuídas entre as três matérias. Além disso, ela quer seguir os seguintes critérios:

- Ela precisa dedicar o dobro do tempo de estudo em matemática do que em física.
- A soma do tempo de estudo em física e química deve ser igual ao tempo que ela dedica a matemática.

Ajude Maria a determinar quantas horas por semana ela deve dedicar a cada matéria para seguir seu planejamento.

Exercício 9 – Escreva a equação com duas e três variáveis que representa cada sentença:

- a) A soma de dois números distintos equivale a 14 R: $x + y = 14$
- b) Em um estojo, há 15 objetos, entre lápis e canetas. R: $l + c = 15$
- c) Fui a feirinha e comprei alguns pastéis por R\$ 5,00 cada, alguns sucos por R\$ 3,50 cada um e algumas verduras para minha mãe que cada pacote custava R\$ 8,00 cada. Ao todo paguei R\$ 71,00. R: $5p + 3,5s + 8v = 71$
- d) Em uma prova, para cada questão certa, o estudante recebe +5 pontos e, para cada questão errada ou em branco, ele recebe -3 pontos. Um estudante tirou 12 pontos nessa prova. R: $5a - 3e = 12$

Exercício 10 – Modele um sistema de equação com as situações apresentadas:

1. Uma mercearia adquiriu caixas de bombons contando 24 unidades nos sabores chocolate e morango. Cada caixa contém 4 bombons de chocolate a mais do que a quantidade de bombons de morango. Quantos bombons de cada sabor há em cada caixa?

$$\begin{cases} c + m = 24 \\ c = m + 4 \\ c = 14 \\ m = 10 \end{cases}$$

2. Gabriela e Lucas juntaram suas economias para comprar uma televisão de R\$ 4 500,00. Gabriela conseguiu juntar o dobro que Lucas. Quanto cada um economizou?

$$\begin{cases} g + l = 4500 \\ g = 2l \\ g = 3000 \\ l = 1500 \end{cases}$$

Tarefa de casa

Exercício 1 – Resolva os seguintes sistemas:

- a) $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -4 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

Exercício 2 - (ENEM 2021 questão 164) Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg. Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm mesma massa. Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

- a) 22
b) 24
c) 26
d) 33
e) 39

Exercício 3 – Modele um sistema de equações com a situação descrita:

- a. Marcos e João são irmãos, juntos somam 33 anos, mas Marcos tem o dobro de idade de João, quantos anos cada um tem?
- b. Um pacote de doces sortidos contém três tipos de doces, os quadradinhos, os triangulares e os redondinhos. Na embalagem diz que temos 115 unidades ao total. Ao observar vemos que há 5 quadradinhos a mais que os triangulares. E os redondinhos são o dobro da quantidade dos quadradinhos. Qual a quantidade de cada um?

Exercício 4 – (UFRGS) O sistema de equações

$$\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$$

possui:

- a) Nenhuma solução
- b) Uma solução
- c) Duas soluções
- d) Três soluções
- e) Infinitas soluções

Referências:

Vitorino A., Gomes M. A. R., **Álgebra Linear e Aplicações**. 2014. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/sistemas_lineares.html

MARTINS, Fabíola da Cruz; ANDRADE, Silvanio de. Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 20, n. 01, p. e023005, 2023. DOI: 10.37001/remat25269062v20id738. Disponível em: <https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/6>. Acesso em: 13 set. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 21 de setembro

No quarto dia de aula, os professores estagiários se reuniram e ministraram a aula que aconteceu das 08:00 às 11:40, com 16 alunos presentes. Nessa aula os professores estagiários não começaram fazendo a correção da tarefa de casa, já que os alunos relataram não ter feito a lista de exercícios e foram direto para o primeiro exercício do plano de aula, que seria sobre sistemas lineares. Foi utilizado um projetor para mostrar o enunciado do primeiro exercício em slides, assim como o enunciado do próximo exercício, que seria uma continuação do primeiro. Os professores estagiários decidiram utilizar slides para esses 2 exercícios para que os alunos não conectassem a definição de equação linear com o exercício tão rapidamente. Além disso, os professores estagiários gostariam de ver a reação dos alunos em relação aos slides, para assim planejar o uso ou não de slides nas próximas aulas. Mas ao realizar uma enquete, no terceiro dia de aula perguntando sobre o uso de slides, apenas 2 alunos relataram achar melhor usar os slides.

Os alunos responderam de formas diferentes o exercício 1. Isso era de esperar, pois foi utilizado um problema possível e indeterminado para que os alunos tentassem descobrir uma resposta específica. Assim os professores indagaram os alunos a descobrirem se essa era a única resposta possível e o que ligava todas essas respostas diferentes, para assim achar a equação linear desejada.

Foi notado uma dificuldade da parte dos alunos nos exercícios 1 e 1.1, o que deixou os alunos muitos tensos em relação ao conteúdo. Essa insegurança fez com que os integrantes dos grupos raramente se ajudassem ou discutissem significativamente sobre os problemas. Em apenas um grupo houve proatividade em ajudar os integrantes, sendo o grupo que possuía um graduando que explicou para seus colegas as primeiras atividades.

Durante a resoluções dos 2 primeiros exercícios, os professores estagiários notaram que os alunos preferiam o método da substituição. Portanto, foi decidido apresentar ele antes do método da soma, diferente do programado no Plano de Aula. Na correção do exercício 2, um dos alunos teve uma dúvida em relação à igualdade de equações, em que era necessário somar um número inteiro com uma fração. Trocamos o número inteiro por uma fração equivalente, e o aluno, ao ver isso, perguntou por que não tinha sido feito uma multiplicação em ambos os lados para resolver. Mostramos que um número inteiro poderia ser transformado em uma fração que era equivalente a esse número ou, se o aluno preferisse, poderia ser feito a soma após a multiplicação de ambos os lados, como um dos alunos mencionou.

No segundo horário, decidimos que ao resolvermos o exercício 2 no quadro, pediríamos para os alunos começarem a fazer o exercício 8 e os subsequentes. O motivo dessa decisão foi que notamos que o tempo utilizado nos exercícios 1 e 1.1 foram bem maior do que o previsto. Com esta estratégia, todos os alunos conseguiram fazer pelo menos um exercício entre os exercícios 3 e 7, enquanto esperavam outros alunos terminarem. A aula acabou com os professores estagiários fazendo a resolução de um problema de 3 equações, e a atividade das varetas não foi utilizada pela falta de tempo.

Após o término da aula, um dos professores estagiários comentou como deveria ter sido dado mais ênfase na definição de sistema linear e o que significava sua solução. Sendo que os alunos apresentaram bastante dificuldades em interpretar e transformar a linguagem natural de um exercício em um sistema matemático. Foi visto durante a aula que os alunos se sentiam mais confortáveis fazendo o método da substituição. Os professores estagiários pensam que essa insegurança relacionada ao método da soma seja pela falta de exemplos mostrando que é necessário multiplicar uma constante antes de somar, o que muitos alunos não parecem ter entendido direito.

2.5 AULA 05 – Sistemas Lineares II (28/09)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Sistemas lineares

- Determinantes para classificação de sistemas
- Identificação de gráficos para resolução de sistemas

Sistemas Lineares

Objetivo Geral:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com sistemas lineares, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Identificar os tipos de sistemas lineares.
- Conhecer a resolução de sistemas por meio da representação gráfica.
- Verificar se um sistema é possível, impossível, determinado ou indeterminado.

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, lista de exercícios impressa, laboratório de informática.

Introdução

A primeira parte da aula será feita no laboratório de informática. Iniciaremos retomando alguns exercícios que forem solicitados pelos alunos.

Vamos relembrar o comentário feito na aula anterior sobre a existência das classificações dos sistemas lineares que estão no quadro abaixo:

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Figura 14 - Classificação dos sistemas lineares

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Fonte: Autores

Após isso, iremos relacionar os sistemas de duas incógnitas com matrizes, a fim de utilizá-las para encontrar o determinante. Para isso, usaremos o exemplo da aula anterior. Dado o sistema:

$$\begin{cases} c + m = 24 \\ c = m + 4 \end{cases}$$

Podemos escrever uma matriz cujos elementos são os coeficientes que representam o sistema e calcular seu determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - (1) = -2 \neq 0$$

e rapidamente comentar que com o determinante conseguimos determinar se um sistema é SPD ou não.

- Quando o $det \neq 0$ temos um sistema possível e determinado (SPD).
- Quando o $det = 0$ podemos ter um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível.

Com a ajuda das representações gráficas, podemos verificar qual é o tipo de sistema.

Faremos também mais um exemplo de sistema de três incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 1 - (2 + 0 + 1) = -1 - 3 = -4 \neq 0$$

Como $det \neq 0$, temos que o sistema é possível e determinado.

Já o sistema a seguir não será possível e determinado:

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ x - 2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (1) = 0$$

Pois $det = 0$.

Atividade Geogebra

Em seguida, pediremos para que os alunos abram o site geogebra.org e mostraremos, com ajuda dos slides, como inserir equações para verificarmos seus gráficos no aplicativo. Pediremos para que os alunos insiram 2 equações de 2 incógnitas para pensarem, a partir da representação gráfica, que tipo de sistema estas duas equações formam.

- $-2x + y = 1$ e $x + y = 3$

Para ajudá-los a pensar, faremos perguntas como:

- 1- Com as retas traçadas no GeoGebra, o que é possível observar sobre o comportamento delas?
- 2- Quantos pontos de interseção você consegue ver entre as duas retas? O que isso pode significar em relação à solução do sistema de equações?
- 3- O que podemos dizer sobre as coordenadas desse ponto de interseção? Como elas se relacionam com as soluções do sistema de equações?
- 4- Você acha que as retas poderiam se cruzar em mais de um ponto? Por que isso não acontece nesse caso?
- 5- Agora que sabemos que as retas se encontram em um ponto, como você classificaria esse sistema?

- $x + y = 5$ e $3x + 3y = 15$

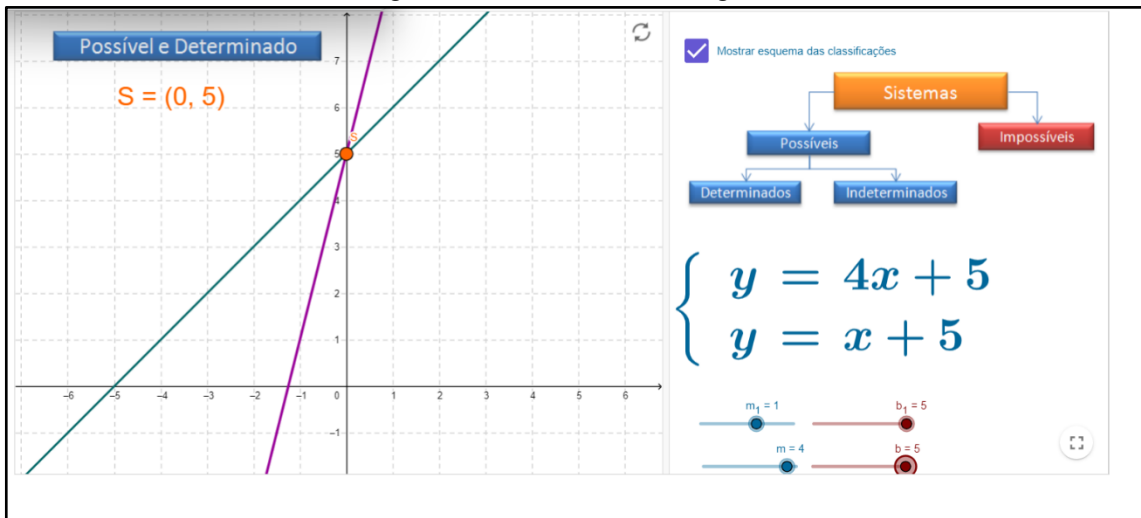
- 1- Com as retas traçadas no GeoGebra, o que é possível observar sobre o comportamento delas?
- 2- Quantos pontos de interseção você consegue ver entre as duas retas? O que isso pode significar em relação à solução do sistema de equações?
- 3- Como você classificaria este sistema?

- $-x + y = 4$ e $-x + y = 12$

- 1- Com as retas traçadas no GeoGebra, o que é possível observar sobre o comportamento delas?
- 2- Quantos pontos de interseção você consegue ver entre as duas retas? O que isso pode significar em relação à solução do sistema de equações?
- 3- Como você classificaria este sistema?

Em seguida, vamos pedir para que os alunos acessem o link <https://www.geogebra.org/m/q3rzpefg> em que há uma solução disponível para classificar um sistema de 2 incógnitas como possível e determinado, ou indeterminado ou impossível, a partir dos coeficientes das equações com controle deslizante para que eles mesmos montem 3 exemplos de sistemas com cada uma das classificações de sistemas.

Figura 15 - Sistema de duas incógnitas

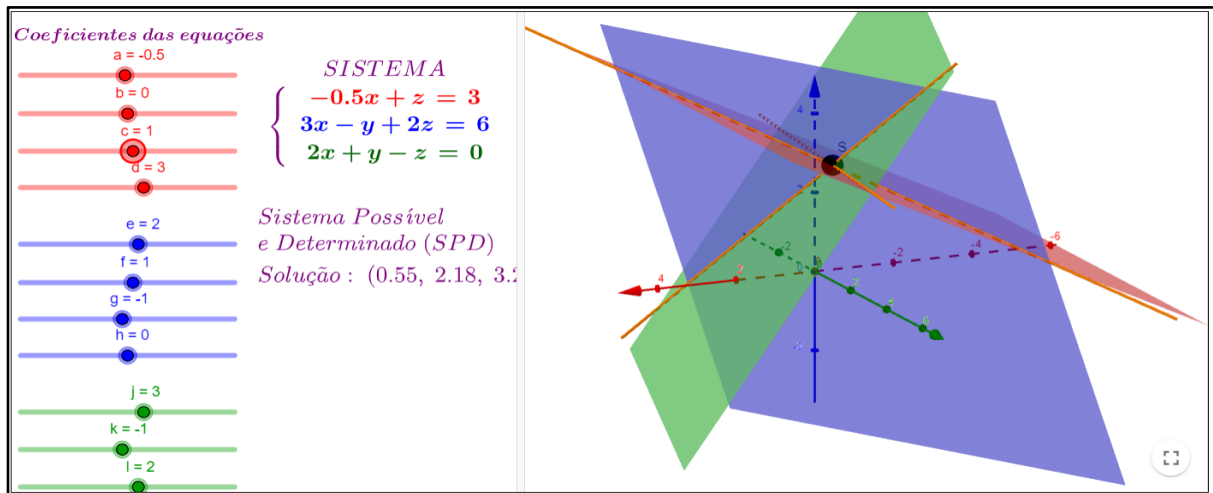


Fonte: <https://www.geogebra.org/m/q3rzpefg>, 2024

Depois disso vamos pedir para que eles nos relatem o que conseguiram observar que faz com que os sistemas sejam possíveis indeterminados ou impossíveis. Esperamos que eles consigam observar que, nos sistemas indeterminados, uma equação é múltipla da outra, e que, nos sistemas impossíveis, o coeficiente angular é o mesmo, mas o linear é diferente.

Também faremos isso com os sistemas de 3 incógnitas, mas princípio, nosso enfoque será os de sistema 2x2, mas deixaremos este material disponível para os alunos que terminarem antes dos outros colegas.

Figura 16 - Gráfico com três incógnitas



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/q3rzpefg>, 2024

Sistema possível e determinado:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + y + z = 6 \\ 9x + 14y + z = 20 \end{cases}$$

Sistema possível e indeterminado:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + y + z = 6 \\ 9x + 9y + 9z = 9 \end{cases}$$

Sistema impossível:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + y + z = 6 \\ 9x + 9y + 9z = 20 \end{cases}$$

Observe os gráficos e responda:

- 1- O que faz com que um sistema 3x3 seja possível e indeterminado?
- 2- O que faz com que seja impossível?

Na segunda metade da aula, serão trabalhados alguns outros exercícios de sistemas 3x3, para que seja feita a atividade pega varetas. Para complementar as informações da primeira parte da aula, nós iremos trazer uma folha com a discussão abaixo do porquê o determinante ser utilizado na classificação de sistemas. Essa folha será apenas um bônus e não será entregue para os estudantes. Aqueles que estiverem mais avançados serão convidados a olharem a discussão para que não fiquem ociosos.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema acima de uma maneira um pouco diferente, em que não calcularemos as multiplicações, divisões, somas e subtrações, mas apenas iremos organizar os termos, isolando uma das incógnitas. A resolução será feita por substituição e isolaremos o x na primeira equação para obter y com a segunda. As contas seguem abaixo:

$$2x + 5y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 9 - 5y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9 - 5y}{2}$$

$$3x + 7y = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{9 - 5y}{2}\right) + 7y = 13$$

$$\frac{3 \cdot 9 - 3 \cdot 5y}{2} + 7y = 13$$

$$3 \cdot 9 - 3 \cdot 5y + 2 \cdot 7y = 2 \cdot 13$$

$$(2 \cdot 7 - 3 \cdot 5)y = 2 \cdot 13 - 3 \cdot 9$$

$$y = \frac{2 \cdot 13 - 3 \cdot 9}{2 \cdot 7 - 3 \cdot 5}$$

Finalmente, se realizarmos as operações básicas na fração acima, $y = \frac{26-27}{14-15} = 1$. Substituindo na primeira equação,

$$2x + 5(1) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Portanto, conseguimos chegar na resposta sem qualquer problema.

Entretanto, perceba que a expressão para y envolve uma fração, e o que aconteceria se o denominador resultasse em zero? y não seria um número bem definido! Logo, não teríamos uma solução única para o sistema. Note que o denominador da fração é exatamente a expressão do determinante da matriz dos coeficientes do sistema. Logo, se esse determinante for igual a zero, o sistema não possui solução única. A discussão feita apenas é para sistemas 2×2 , mas se estende para outros sistemas.

Exercício 01: verifique se o seguinte sistema de equações possui solução:

$$\begin{cases} -4x + y - z = 7 \\ 3x - 2y - 3z = -19 \\ x - y - 2z = -10 \end{cases}$$

Solução: Esse sistema possui infinitas soluções, pois a matriz dos coeficientes possui determinante nulo. Para ver que ele não é impossível, mas indeterminado resolvemos o sistema até chegarmos na equação $0 \cdot z = 0$, a qual é válida para qualquer valor de z . Sendo assim, há infinitas soluções e o sistema é possível e indeterminado.

Exercício 02: Resolva o seguinte sistema pelo método que achar mais conveniente:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -5 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

Solução: $x = -1$, $y = 1$ e $z = 2$. Usaremos o método da substituição para resolver em sala. Isolaremos z na primeira equação, substituiremos esse valor nas equações 2 e 3 e chegaremos a um sistema de duas equações e duas incógnitas. Usaremos novamente o método da substituição para resolvê-lo.

Exercício 03: (Instituto Consulplan 2024) Um professor de Matemática lanchou três dias seguidos em uma lanchonete. Em cada dia ele fez os pedidos compostos por coxinha, suco e brigadeiro; pagou os valores conforme a tabela a seguir:

Quadro 11 - Consumo dos três dias

Dia	Coxinha	Suco	Brigadeiro	Custo Total
1°	2	2	1	R\$ 13,50
2°	3	2	2	R\$ 19,00
3°	1	2	3	R\$ 12,50

Fonte: Instituto Consulplan, 2024

Sabendo-se que não houve alteração nos preços praticados pela lanchonete e que nenhum dos itens foi de graça, pode-se concluir que:

- A) O suco custa menos do que R\$ 1,50.
- B) A coxinha custa mais do que R\$ 3,50.
- C) O brigadeiro custa mais do que R\$ 1,50.
- D) A coxinha custa menos do que R\$ 3,00.

Solução: $c = 4$; $s = 2$; $b = 1,50$. Logo, a alternativa correta é a letra B. Montaremos o sistema linear de equações relacionado com o problema e resolveremos pelo método da substituição, isolando a incógnita b na primeira equação.

Atividade Pega-Varetas

Vamos pedir para os alunos se unirem em grupos de 3 alunos para realizar a seguinte atividade: Num jogo de pega-varetas, a vareta verde vale 1 pontos, a azul 3 pontos, a amarela 5 pontos, a vermelha 15 pontos e a preta 30 pontos. Joguem uma partida e, de acordo com o número de varetas pegadas por cada jogador, formem um sistema linear de três incógnitas para que outro grupo o resolva!

Comentários: Os alunos podem se perguntar como fazer para formar um sistema de apenas 3 incógnitas se por acaso eles pegarem mais de 3 cores de varetas. Podemos instruir que eles podem colocar o valor numérico de pontos, para não incluir mais de 3 incógnitas.

Outra dúvida que pode surgir, é se um aluno pegar apenas 1 ou 2 cores. Podemos salientar que este não será um problema, que um sistema de 3 incógnitas não necessariamente precisa ter 3 equações com todas as 3 incógnitas para ter solução única. Se no caso, 2 alunos pegarem cores completamente diferentes, a exemplo de Amarelo, azul e verde e outro aluno pegar apenas vermelho e preto) pediremos para os alunos escolherem 3 cores que utilizam as 3 equações. No exemplo dado, eles poderiam escolher as cores amarelo, azul e preta como as 3 incógnitas do sistema linear.

Apostila – Sistemas Lineares 2

Um sistema linear pode ser classificado em 3 tipos:

- Sistema possível e determinado (SPD)
- Sistema possível e indeterminado (SPI)
- Sistema impossível (SI)

Quando o $\det \neq 0$ temos um sistema possível e determinado (SPD).

Quando o $\det = 0$ podemos ter um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível.

Com a ajuda das representações gráficas, podemos verificar qual é o tipo de sistema.

Atividade GeoGebra

- Acesse o site geogebra.org
 - Escreva as equações: $-2x + y = 1$ e $x + y = 3$
- 1- Com as retas traçadas no GeoGebra, o que é possível observar sobre o comportamento delas?
 - 2- Quantos pontos de interseção você consegue ver entre as duas retas? O que isso pode significar em relação à solução do sistema de equações?
 - 3- O que podemos dizer sobre as coordenadas desse ponto de interseção? Como elas se relacionam com as soluções do sistema de equações?
 - 4- Você acha que as retas poderiam se cruzar em mais de um ponto? Por que isso não acontece nesse caso?
 - 5- Agora que sabemos que as retas se encontram em um ponto, como você classificaria esse sistema?
-
- $x + y = 5$ e $3x + 3y = 15$
- 1- Com as retas traçadas no GeoGebra, o que é possível observar sobre o comportamento delas?
 - 2- Quantos pontos de interseção você consegue ver entre as duas retas? O que isso pode significar em relação à solução do sistema de equações?
 - 3- Como você classificaria este sistema?
-
- $-x + y = 4$ e $-x + y = 12$

- 1- Com as retas traçadas no GeoGebra, o que é possível observar sobre o comportamento delas?
- 2- Quantos pontos de interseção você consegue ver entre as duas retas? O que isso pode significar em relação à solução do sistema de equações?
- 3- Como você classificaria este sistema?

Resumindo:

- Se as retas são **paralelas**:

Isso acontece quando os coeficientes são:

- Se as retas são **concorrentes**:

Isso acontece quando os coeficientes são:

- Se as retas são **coincidentes**:

Isso acontece quando os coeficientes são:

Com base nas relações que você aprendeu nas atividades anteriores, indique sem traçar o gráfico:

- A posição relativa das retas associadas a cada equação do sistema;
- O tipo de sistema: SPD, SPI, SI.

Sistema	Posição relativa entre retas	Tipo do sistema	Justificativa
$\begin{cases} y = x + 8 \\ y = x - 12 \end{cases}$			
$\begin{cases} x + y = -3 \\ 5x + 5y = -15 \end{cases}$			
$\begin{cases} y = x + 11 \\ y = 4x + 8 \end{cases}$			

$\begin{cases} 6y - 6x = 18 \\ y = x + 3 \end{cases}$			
$\begin{cases} y = -3x - 7 \\ y = x - 5 \end{cases}$			
$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$			

Agora que você respondeu, confira suas respostas com a ajuda do GeoGebra.

- Acesse <https://www.geogebra.org/m/q3rzpefg>
- Crie três sistemas: um SPD, um SPI e um SI.

Exercício 01: verifique se o seguinte sistema de equações possui solução:

$$\begin{cases} -4x + y - z = 7 \\ 3x - 2y - 3z = -19 \\ x - y - 2z = -10 \end{cases}$$

Exercício 02: resolva o seguinte sistema pelo método que achar mais conveniente:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -5 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

Exercício 03: (Instituto Consulplan 2024) Um professor de Matemática lanchou três dias seguidos em uma lanchonete. Em cada dia ele fez os pedidos compostos por coxinha, suco e brigadeiro; pagou os valores conforme a tabela a seguir:

Dia	Coxinha	Suco	Brigadeiro	Custo Total
1º	2	2	1	R\$ 13,50
2º	3	2	2	R\$ 19,00
3º	1	2	3	R\$ 12,50

Sabendo-se que não houve alteração nos preços praticados pela lanchonete e que nenhum dos itens foi de graça, pode-se concluir que:

- O suco custa menos do que R\$ 1,50.
- A coxinha custa mais do que R\$ 3,50.
- O brigadeiro custa mais do que R\$ 1,50.
- A coxinha custa menos do que R\$ 3,00.

Atividade Pega-Varetas

Vamos pedir para os alunos se unirem em grupos de 3 alunos para realizar a seguinte atividade:

Num jogo de pega-varetas, a vareta verde vale 1 pontos, a azul 3 pontos, a amarela 5 pontos, a vermelha 15 pontos e a preta 30 pontos. Juguem uma partida e, de acordo com o número de varetas pegadas por cada jogador, formem um sistema linear de três incógnitas para que outro grupo o solucione!

Tarefa de casa

Exercício 1 – Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

Exercício 2 – Em seu caderno, construa a reta correspondente a cada equação:

a) $x + y = 15$

b) $2x - y = 10$

Exercício 3 – Um terreno de dimensões x (largura) e y (comprimento) possui perímetro inicial igual a 280m. Aumentando a medida da largura em 2m e a medida do comprimento em 4m, o novo perímetro passa a ser igual a 292m. Escreva as equações que representam o perímetro inicial e final desse terreno.

Exercício 4 – Em um caixa eletrônico, Samuel sacou x notas de 20 reais e y notas de 10 reais, em um total de 18 cédulas. Escreva o sistema que representa essa situação sabendo que ele sacou ao todo 240 reais. Resolva graficamente e determine quantas notas de cada ele recebeu.

Exercício 5 – O sistema $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ apresenta quantas soluções?

Exercício 6 (ENEM 2013) – Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos

b) 360 tijolos

c) 400 tijolos

d) 480 tijolos

e) 600 tijolos

Atividade com o GeoGebra

- Acesse <https://www.geogebra.org/m/jMBmtxfp>

Sistema possível e determinado:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + y + z = 6 \\ 9x + 14y + z = 20 \end{cases}$$

Sistema possível e indeterminado:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + y + z = 6 \\ 9x + 9y + 9z = 9 \end{cases}$$

Sistema impossível:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 7x + y + z = 6 \\ 9x + 9y + 9z = 20 \end{cases}$$

Observe os gráficos e responda:

- 3- O que faz com que um sistema 3x3 seja possível e indeterminado?
- 4- O que faz com que seja impossível?

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x + 7y = 13 \end{cases}$$

Vamos resolver o sistema acima de uma maneira um pouco diferente: não calcularemos as multiplicações, divisões, somas e subtrações e apenas iremos organizar os termos, isolando uma das incógnitas. A resolução será feita por substituição e isolaremos o x na primeira equação para obter y com a segunda. As contas seguem abaixo:

$$2x + 5y = 9 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 9 - 5y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9 - 5y}{2}$$

$$3x + 7y = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{9 - 5y}{2}\right) + 7y = 13$$

$$\frac{3 \cdot 9 - 3 \cdot 5y}{2} + 7y = 13$$

$$3 \cdot 9 - 3 \cdot 5y + 2 \cdot 7y = 2 \cdot 13$$

$$(2 \cdot 7 - 3 \cdot 5)y = 2 \cdot 13 - 3 \cdot 9$$

$$y = \frac{2 \cdot 13 - 3 \cdot 9}{2 \cdot 7 - 3 \cdot 5}$$

Finalmente, se realizarmos as operações básicas na fração acima, $y = \frac{26-27}{14-15} = 1$.

Substituindo na primeira equação,

$$2x + 5(1) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Portanto, conseguimos chegar na resposta sem qualquer problema. Entretanto, perceba que a expressão para y envolve uma fração. O que aconteceria se o denominador resultasse em

zero? y não seria um número bem definido! Logo, não teríamos uma solução única para o sistema. Note que o denominador da fração é exatamente a expressão do determinante da matriz dos coeficientes do sistema. Logo, se esse determinante for igual a zero, o sistema não possui solução única. A discussão feita abrange apenas sistemas 2×2 , mas se estende para outros sistemas.

Relatório da aula ministrada no dia 28 de setembro

Estiveram presentes 16 alunos. Começamos a aula na sala usual, e não no laboratório de informática como tínhamos previsto, já que todos os laboratórios estavam sendo usados. Fomos ao laboratório apenas na segunda parte da aula, depois do intervalo, o que acabou sendo bom, pois conseguimos trabalhar com mais calma o conteúdo de determinantes, para que os alunos conseguissem utilizar depois. Mas acabamos nos estendendo além do horário, perdendo cinco minutos de intervalo.

Em relação à explicação de determinantes, que foi expositiva, sentimos que foi bem produtiva, pois os alunos conseguiram entender bem o algoritmo. Foi também um pouco mais maçante para alunos mais avançados. Notamos que o problema em si, para aqueles que tiveram dificuldades, não foi o conteúdo de determinantes, mas a adição de números negativos, conteúdo que se espera que eles já tivessem dominado.

Após, fizemos mais alguns exercícios de sistemas lineares de 3 incógnitas e 3 equações, que foi o que acabou se estendendo além do que esperávamos, já que os alunos estavam demorando para conseguir resolvê-los.

Os alunos, como já visto nas aulas anteriores, estavam pouco comunicativos, mas receptivos aos professores estagiários, e sempre que verificamos eles já estavam fazendo ou então tiravam dúvidas.

Mais uma vez ficou evidente a disparidade de conhecimento entre os alunos, o que tornou desafiador nossa atuação. Sendo necessário o uso dos exercícios extras para os alunos adiantados, o que foi bem produtivo, pois gostaram bastante do material e discutiram conosco sobre suas conclusões.

Depois do intervalo, levamos os alunos para o laboratório de informática. Mostramos como fazer gráficos pelo GeoGebra e, com o auxílio da apostila impressa, pedimos para que eles respondessem perguntas norteadoras para identificarem o que faz com que um sistema seja um sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou um sistema impossível (SI). Quando passamos nas mesas, todos os alunos conseguiram observar graficamente como classificar um sistema linear de 2 incógnitas, mas quando fomos fazer a discussão no quadro, apenas 2 alunos se dispuseram a responder, depois de insistirmos bastante.

Em seguida, colocamos alguns sistemas lineares diferentes, escritos na forma $by = ax + c$ e $ax + by = c$ para que eles vissem as diferentes formas de se representar um sistema e que a representação gráfica é a mesma. Mas ainda faltou um pouco para que alguns alunos conseguissem fazer a transformação da equação na forma de sistema para equação na fórmula

da equação da reta, pois não se lembravam de trocar o sinal ou então só conseguiam interpretar na forma de sistemas, e não na forma de equação da reta.

Depois disso, pedimos para que os alunos olhassem para os sistemas e dissessem, sem olhar a construção do GeoGebra, qual a classificação do sistema. Muitos conseguiram responder, mas alguns tivemos que ajudar a construir o gráfico no caderno, para que eles soubessem fazer este processo por si mesmos para que interpretassem qual a classificação do sistema.

A segunda parte da aula no laboratório de informática foi também proveitosa, no entanto nos esquecemos de reforçar que pode ser feito o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes dos sistemas para verificar se é SPD, SPI ou SI.

2.6 AULA 06 – Geometria Analítica (05/10)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Geometria analítica

- Plano cartesiano
- Distância entre pontos
- Equação da reta e da circunferência

Objetivo Geral:

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau

Objetivos Específicos:

Ao se trabalhar com Geometria Analítica, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Reconhecer os elementos do plano cartesiano (pontos e retas no plano cartesiano);
- Calcular distâncias entre pontos;
- Identificar a equação geral da reta e a equação reduzida da circunferência;
- Compreender as posições relativas entre retas (paralelas, concorrentes e perpendiculares);

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, lista de exercícios impressa, tnt ou fita para marcar eixos do plano cartesiano.

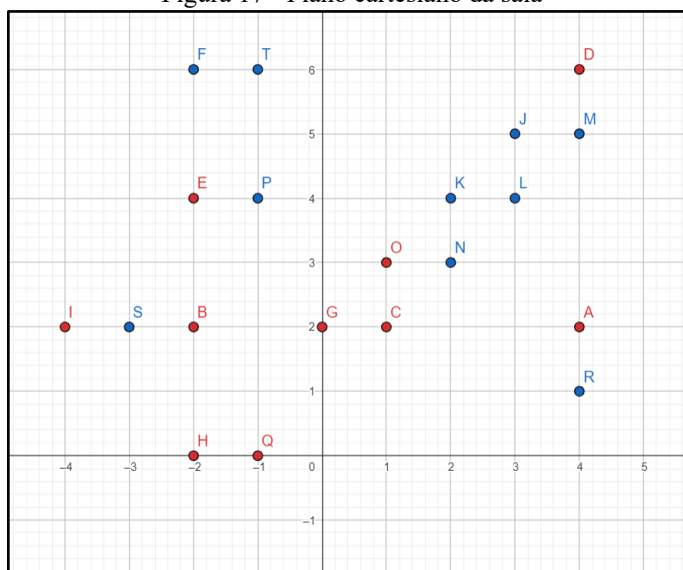
Atividade – Plano cartesiano em sala

Ao entrarem na sala, as mesas estarão organizadas com distâncias uniformes entre elas para que ilustre um plano cartesiano. Uma linha vermelha estará colada no chão para mostrar os eixos nas carteiras centrais da sala, de modo que formemos os eixos das abscissas e das ordenadas.

Quando um aluno entrar na sala, ele receberá um papel com um par ordenado, e deverá se sentar na carteira que corresponde ao seu ponto do plano cartesiano.

O mapeamento dos alunos ficará no seguinte formato:

Figura 17 - Plano cartesiano da sala



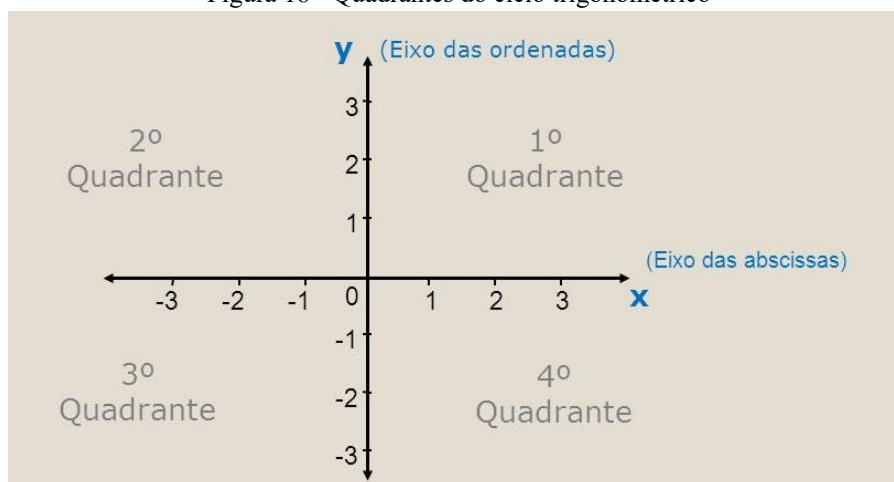
Fonte: Autores, GeoGebra

Os pontos em vermelho serão essenciais na utilização das atividades que introduzirão os conceitos propostos.

Assim que os alunos estiverem em seus lugares, discutiremos os elementos de um plano cartesiano:

- Os dois eixos; X e Y , em que, X e Y designados, respectivamente, por eixo das abscissas e o eixo das ordenadas.
- O ponto 0, denominado origem, que é a intersecção dos eixos X e Y .
- Os quadrantes; pois um plano cartesiano possui quatro quadrantes em sua constituição, como visto na imagem a seguir:

Figura 18 - Quadrantes do ciclo trigonométrico



Fonte: <https://slideplayer.com.br/slide/6824013/>, 2024

Um plano cartesiano é composto de duas retas numéricas que se interceptam formando um ângulo de 90° .

Para localizar um ponto sobre o plano cartesiano, necessitamos de duas coordenadas, uma delas, representa a posição do ponto em relação ao eixo X , e a outra representa a posição do ponto em relação ao eixo Y .

Distância entre pontos

Para introduzir este conceito, usaremos como referência a posição e as distâncias entre as carteiras em que os alunos estão sentados nos pontos

A distância entre dois pontos $A (X_A, Y_A)$ e $B (X_B, Y_B)$, situados num plano cartesiano, pode ser determinada em função das suas coordenadas.

1- Qual a distância entre o aluno do ponto C até o aluno do ponto A?

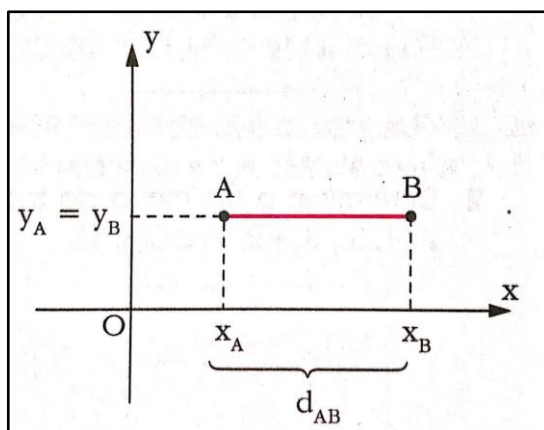
Comentários da atividade: Primeiramente verificaremos se os alunos conseguem responder utilizando as carteiras como referência, mesmo sem nossa ajuda. Caso não consigam, vamos lembrá-los que podem usá-las. Depois que responderem que a distância é de 3 carteiras (lembrando que não contamos a carteira do aluno C, apenas a próxima carteira), formalizaremos a forma de calcular a distância a partir das coordenadas dos pontos.

1º caso – (Distância entre pontos paralelos ao eixo X)

O segmento AB é paralelo ao eixo Oy , onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre abscissas.

$$d_{AB} = |X_B - X_A|$$

Figura 19 - Distância entre pontos I



Fonte: Filho e Barreto, 2000

2- Qual a distância entre os alunos que estão nos pontos A e D?

Comentários da atividade: Seguindo o padrão da atividade anterior, esperamos que agora eles consigam responder mais rapidamente que a distância é de quatro carteiras. Depois disso,

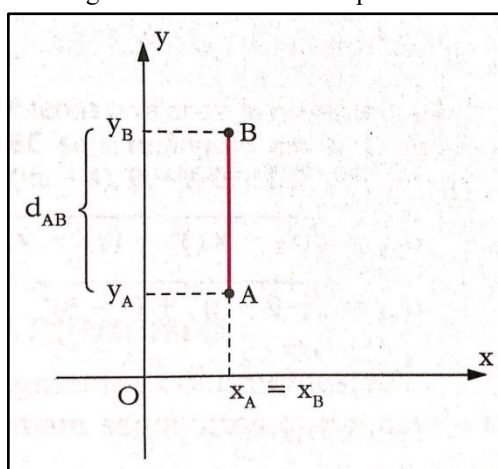
novamente formalizaremos a forma de calcular a distância entre dois pontos paralelos ao eixo Y.

2º caso – (Distância entre pontos paralelos ao eixo Y)

O segmento AB é paralelo ao eixo Ox , onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre ordenadas.

$$d_{AB} = |Y_B - Y_A|$$

Figura 20 - Distância entre pontos II



Fonte: Filho e Barreto, 2000

3- Qual a distância entre os alunos dos pontos C e D?

Comentários da atividade: Neste momento, talvez os alunos tentem calcular a distância utilizando as carteiras novamente, o que não será possível, já que as carteiras estarão na diagonal, então não será possível garantir exatamente por este método. Para calcular, utilizaremos um barbante para medir a distância de cinco carteiras (entre os pontos C e D) que será previamente cortado para mostrar que esta será a distância entre os pontos. Depois disso, vamos utilizar este mesmo barbante e mostrar aos alunos que esta medida do barbante equivale a cinco carteiras. Em seguida formalizaremos a forma de calcular, a partir do triângulo retângulo formado pelos pontos ACD.

3º caso – (Distância entre pontos não paralelos a qualquer dos eixos)

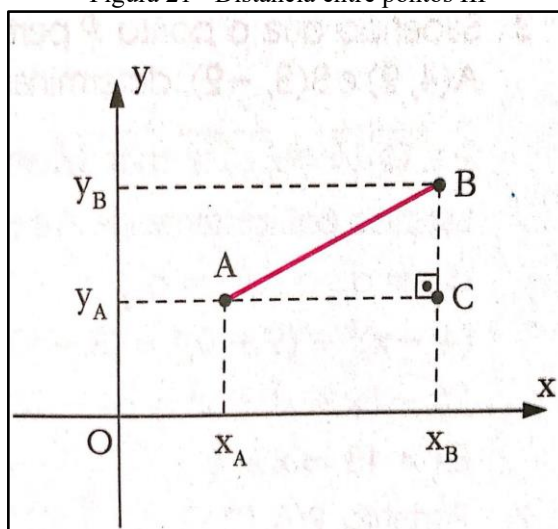
O segmento AB não é paralelo a nenhum eixo. A distância d_{AB} depende das diferenças entre abscissas e ordenadas, de tal forma que, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos:

$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2$$

$$d_{AB}^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Figura 21 - Distância entre pontos III



Fonte: Filho e Barreto, 2000

Exercício 01 - Determine a distância entre os seguintes pares de pontos:

- $A (2, -3)$ e $B (5, -3)$
- $C (-2, 6)$ e $D (-2, 4)$
- $E (3, 7)$ e $F (1, 1)$
- Quais são os dois pontos mais distantes entre si do mapa? Qual é a distância entre eles?

Será pautado um tempo para que os estudantes calculem as distâncias acima e, após corrigirmos no quadro, apresentaremos o conceito de ponto médio entre dois pontos. Para isso, utilizaremos o plano cartesiano formado pelos estudantes. No mapeamento mostrado anteriormente, primeiramente entregaremos as pontas do barbante para os estudantes I e G, de modo que o aluno B fique exatamente no meio.

Iremos pedir para que os estudantes verifiquem qual é a relação entre as coordenadas dos alunos nas extremidades e as coordenadas do aluno no ponto médio. Esperamos que os estudantes tenham alguma ideia semelhante a “a coordenada x do aluno B é o número exatamente no meio das coordenadas x de I e G”, a qual remete ao cálculo do ponto médio. Antes de realizarmos uma correção, entregaremos as pontas do barbante aos estudantes A e E, de modo que o aluno O fique no ponto médio. Novamente, instigaremos os estudantes a verificarem uma relação entre as coordenadas x e y dos alunos envolvidos.

Após a realização dessa atividade, formalizaremos o conceito de ponto médio, o qual estará presente na apostila

Definição (ponto médio): O ponto médio $C(x_c, y_c)$ entre dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ no plano cartesiano é o ponto que se situa exatamente no meio dos dois, e suas coordenadas são:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$$

$$y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto médio são a média das coordenadas.

Exercício 2 - Observando no plano cartesiano que construímos com as carteiras da sala no início da aula, calcule o ponto médio entre os pontos:

- a) A e B.
- b) E e H.
- c) A e E.
- d) S e T.
- e) J e G.
- f) N e T.

Equação reduzida da reta

Para trabalhar a equação reduzida da reta, iremos primeiramente apresentar uma função Afim e pediremos para que os alunos construam o gráfico associado a ela. O gráfico será desenhado em uma malha quadriculada presente na apostila da aula. Caso os estudantes não compreendam muito bem o processo de construção do gráfico, iremos explicar o passo a passo a partir da construção de uma tabela com valores associados de x e y e denotaremos esses pontos na malha quadriculada. A função a ser trabalhada será

$$f(x) = 3x + 4$$

Construiremos a seguinte tabela:

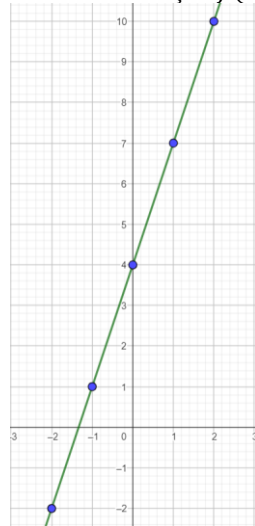
Tabela 1 - Função $f(x) = x$

x	$y = f(x)$
-2	$f(x) = 3(-2) + 4 = -2$
-1	$f(x) = 3(-1) + 4 = 1$
0	$f(x) = 3(0) + 4 = 4$
1	$f(x) = 3(1) + 4 = 7$
2	$f(x) = 3(2) + 4 = 10$

Fonte: Autores

E, a partir desses valores, desenharemos o seguinte gráfico no quadro:

Figura 22 - Gráfico da função $f(x) = 3x + 4$



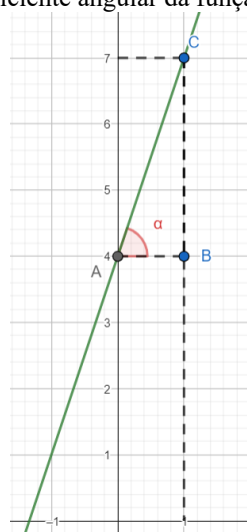
Fonte: Autores, GeoGebra

1º passo – determinar o coeficiente angular

A partir de dois pontos de uma reta, podemos calcular sua equação. A primeira coisa que precisamos observar é a sua inclinação e usando o eixo X como referencial, ou seja, a inclinação da reta será dada a partir do ângulo formado entre ela e o eixo X.

Para determinar este ângulo, vamos destacar que, ao traçar um segmento paralelo ao eixo X que passa pelo ponto (0,4), podemos formar um triângulo retângulo ABC.

Figura 23 - Coeficiente angular da função $f(x) = 3x + 4$



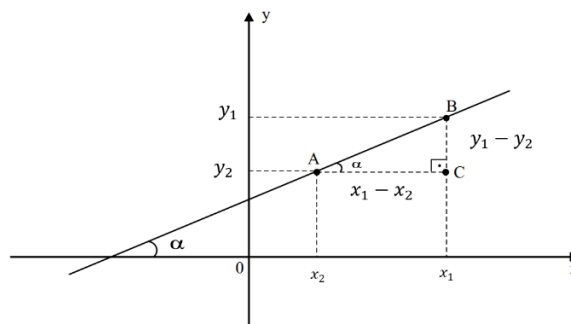
Fonte: Autores, GeoGebra

Em que o ângulo em B é de 90° . Com estes pontos, podemos expressar numericamente a inclinação da reta.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d(B, C)}{d(A, B)} = \frac{7 - 4}{1 - 0} = 3$$

De maneira geral, temos que:

Figura 24 - Coeficiente angular de uma função



Fonte: Cavalcante, 2019

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \widehat{BAC} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

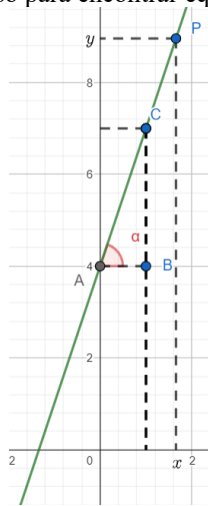
Em que $\operatorname{tg} \alpha$ é o uma constante que expressa a inclinação da reta, que chamamos de m e representamos por:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2º passo – Determinar a equação geral da reta

Veja que, para encontrar um ponto P qualquer na reta do nosso exemplo anterior ($f(x) = 3x + 4$), podemos pensar que suas coordenadas são dadas por $P = (x, y)$. Lembrando também que temos $C = (1, 7)$ Assim, observando no gráfico, teríamos:

Figura 25 - Processo para encontrar equação geral da reta I



Fonte: Autores, GeoGebra

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow m(x - x_1) = y - y_1$$

Ou seja,

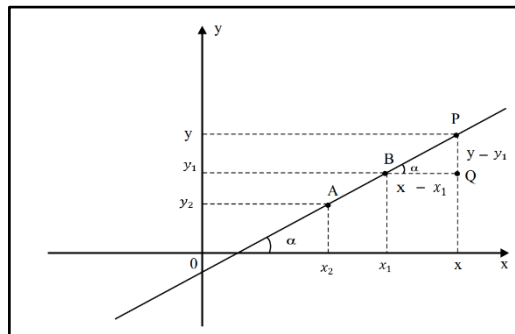
$$3 = \frac{y - 7}{x - 1} \Rightarrow y - 7 = 3(x - 1)$$

Chamamos a equação $y - 7 = 3(x - 1)$ de equação geral da reta. Veja que, se resolvermos estas operações dentro da equação, podemos encontrar:

$$y - 7 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 + 7 \Rightarrow y = 3x + 4$$

Que é exatamente a equação que utilizamos para encontrar o gráfico, em que $y = f(x)$.

Figura 26 - Processo para encontrar equação geral da reta II



Fonte: Cavalcante, 2019

Como o coeficiente angular será o mesmo, temos que

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y = mx + (y_1 - mx_1)$$

Assim, temos:

- **Equação geral da reta:** $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$
- **Equação reduzida da reta:** $y = mx + n$, em que $n = (y_1 - mx_1)$

Em que (x_1, y_1) são as coordenadas de um ponto da reta dado, e m é o **coeficiente angular** da reta.

Observação: No gráfico, chamamos $n = (y_1 - mx_1)$ de **coeficiente linear**. Ele será dado pelo ponto que se encontra sobre o eixo y .

No nosso exemplo anterior, este ponto é o A. Veja que ele é dado quando $x = 0, y = 4$.
Então $n = (y_1 - mx_1) \Rightarrow n = (7 - 3 \cdot 1) = 4$

Exercício 3 - Observando no plano cartesiano que construímos nas carteiras da sala no início da aula, encontre:

- A equação da reta que passa pelos pontos C e Q da sala.
- A equação da reta que passa por E e tem coeficiente angular $m = -2$
- A equação da reta que passa pelos pontos C e G
- A equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular $m = \frac{4}{5}$
- As equações de 3 retas que passam por diferentes pontos de sua escolha do plano que construímos.

Relembrando: posições relativas entre retas

- $r \parallel s$: r é paralela a s , não há pontos em comum entre as retas.

- $r \times s$: r é concorrente a s , há um único ponto em comum entre as retas.
- $r \perp s$: r é perpendicular a s , há um único ponto em comum entre as retas e estas formam 90° entre si.

Exercício 4 -Encontre duas retas no plano cartesiano que construímos na sala que são:

- Paralelas entre si.
- Concorrentes entre si.
- Perpendiculares entre si.

Equação da circunferência

Para introduzirmos este conceito, vamos partir da origem do plano cartesiano construído com as carteiras da sala. Utilizando um barbante, vamos partir da origem e dizer que definimos uma circunferência no plano cartesiano encontrando todos os pontos que estão a uma mesma distância de um ponto que chamaremos de O , o *centro* da circunferência. Esta distância chamaremos de *raio*. A equação reduzida da circunferência na origem será dada por:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Em que r é o raio da circunferência. Diremos então que o centro da circunferência não precisa estar sempre na origem do plano cartesiano, como é o caso do ponto B . A pessoa que estiver sentada no ponto B representa o centro da circunferência que passa pelos pontos E , G , H e I , cujo raio é 2 . Mais uma vez, com a ajuda de um barbante, mostraremos que estão equidistantes e ressaltaremos que há infinitos pontos na circunferência, mas que não vemos, pois estão representados pelas carteiras.

Como esta circunferência não tem centro na origem, diremos aos alunos que precisamos mostrar na equação da circunferência onde é o centro. Para isso, fazemos:

Equação reduzida da circunferência: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Em que:

- a, b são as coordenadas do centro da circunferência;
- r é o raio da circunferência;
- x, y são as coordenadas que queremos encontrar dos pontos que têm distância r do centro (a, b) .

Exercícios 5 – Encontre no plano cartesiano que construímos na sala circunferências cujos centros e raios são:

- a) O ponto B com $r = 2$.
- b) O ponto G com $r = 1$.
- c) O ponto P com $r = 5$.

Exercícios complementares para alunos avançados:

- 1) Expresse algebricamente qual a relação entre os coeficientes das equações de duas retas e a posição relativa entre elas.

$$\text{Sejam } r(x) = a_1x + b_1 \text{ e } s(x) = a_2x + b_2.$$

Se elas são paralelas: $r \parallel s$ então $m_r = m_s$

$$a_1 = a_2$$

Se elas são concorrentes: $m_r \neq m_s$

$$a_1 \neq a_2$$

Se elas são perpendiculares:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

$$a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

- 2) Determine a equação reduzida da circunferência.

Resolução: Vamos estabelecer uma relação para um ponto qualquer $H(x, y)$ que pertence à circunferência de centro $M(a, b)$ e raio r . O ponto $H(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $d_{MH} = r$.

Relembremos que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Logo,

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado, temos:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

A equação descrita acima é conhecida como equação reduzida da circunferência de centro $M(a, b)$ e raio r . Note que o raio da circunferência é sempre maior que zero.

Lista de Exercícios:

Exercício 06 (PUC – RJ) – O ponto $B(3, b)$ é equidistante aos pontos $A(6, 0)$ e $C(0, 6)$. Logo, o ponto B é?

Exercício 07 (PUC – SP) – Para que $2x - y + 4 = 0$ e $ax - 2y = -c$ sejam equações da mesma reta, os valores de a e c devem ser, respectivamente, iguais a:

- a) -4 e -8 b) -2 e -4 c) 1 e 2 d) 2 e 4 e) 4 e 8

Exercício 08 (PUC – SP) – As retas de equações $y = 3x + 1$ e $y = 4x + 3m$ são concorrentes em um ponto do eixo x . O valor de m é:

- a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 1 d) 0 e) $\frac{4}{9}$

Exercício 09 – Determine a posição do ponto $P(3, -5)$ em relação à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$. Isto é, P está dentro ou fora da circunferência?

Exercício 10 – Qual é a equação reduzida da circunferência que passa pela origem e tem o ponto $C(-1, 5)$ como centro?

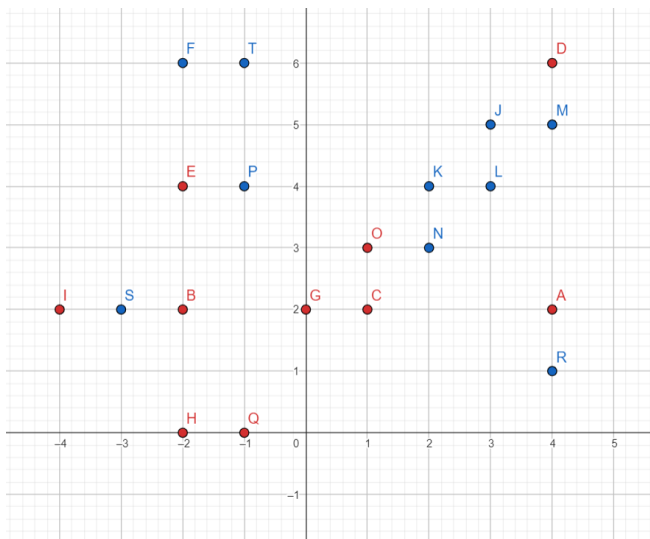
Exercício 11 (Mackenzie – SP) – O segmento de extremidades $P(2, 8)$ e $Q(4, 0)$ é o diâmetro de uma circunferência cuja equação é:

- a) $(x + 13)^2 + y^2 = 289$ b) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 85$
c) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 34$ d) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$
e) $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 34$

Exercício 12 – Obtenha a interseção da reta $s: x - y + 1 = 0$ com a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$

Apostila – Geometria Analítica

Quando todos se sentaram em seus lugares, encontramos esta disposição de lugares representada no plano cartesiano:



Distância entre pontos

- 1- Qual a distância entre o aluno do ponto C até o aluno do ponto A?
- 2- Qual a distância entre os alunos que estão nos pontos A e D?
- 3- Qual a distância entre os alunos dos pontos C e D?

1º caso – O segmento AB é **paralelo ao eixo Oy** , onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre abscissas.

$$d_{AB} = |X_B - X_A|$$

2º caso – O segmento AB é **paralelo ao eixo Ox** , onde a distância d_{AB} é o módulo da diferença entre ordenadas.

$$d_{AB} = |Y_B - Y_A|$$

3º caso – O segmento AB **não é paralelo a qualquer eixo**. A distância d_{AB} depende das diferenças entre abscissas e ordenadas, de tal forma que, ao aplicarmos o teorema de Pitágoras no triângulo ABC , temos:

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Exercício 01 – Determine a distância entre os seguintes pares de pontos:

- a) $A(2, -3)$ e $B(5, -3)$
- b) $C(-2, 6)$ e $D(-2, 4)$
- c) $E(3, 7)$ e $F(1, 1)$

- d) Quais são dois pontos mais distantes entre si do mapa? Qual é a distância entre eles?

Definição (ponto médio): O ponto médio $C(x_c, y_c)$ entre dois pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ no plano cartesiano é o ponto que se situa exatamente no meio dos dois. Suas coordenadas são:

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$$

$$y_c = \frac{y_a + y_b}{2}$$

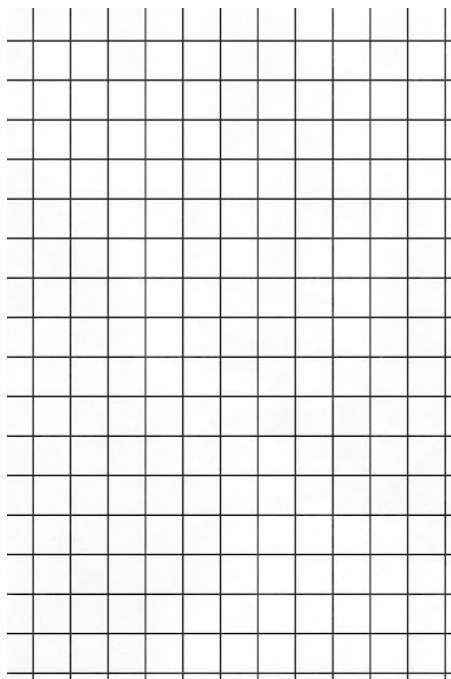
Ou seja, as coordenadas do ponto médio são a média das coordenadas.

Exercício 02 – Pensando no plano cartesiano que construímos com as carteiras da sala no início da aula, calcule o ponto médio entre os pontos:

- a) A e B.
- b) E e H.
- c) A e E.
- d) S e T.
- e) J e G.
- f) N e T.

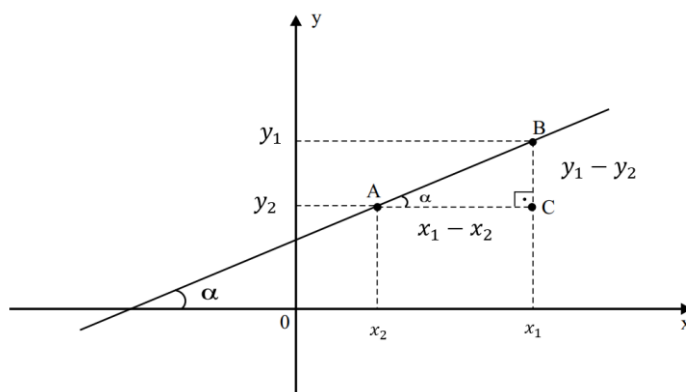
Equação reduzida da reta

Construa um plano cartesiano na malha quadriculada abaixo e, com o auxílio da tabela, construa o gráfico da função $f(x) = 3x + 4$:



x	$y = f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

Como determinar o coeficiente angular?



- **Equação geral da reta:** $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$
- **Equação reduzida da reta:** $y = mx + n$, em que $n = (y_1 - mx_1)$
Em que (x_1, y_1) são as coordenadas de um ponto da reta dado, m é o **coeficiente angular** da reta e n é o **coeficiente linear**.

Exercício 03 – Ainda pensando no plano cartesiano que construímos nas carteiras da sala no início da aula, encontre:

- a) A equação da reta que passa pelos pontos C e Q da sala.
- b) A equação da reta que passa por E e tem coeficiente angular $m = -2$
- c) A equação da reta que passa pelos pontos C e G
- d) A equação da reta que passa pelo ponto P e tem coeficiente angular $m = 4/5$
- e) As equações de 3 retas que passam por diferentes pontos de sua escolha do plano que

construímos

- $r \parallel s$: r é paralela a s , não há pontos em comum entre as retas.
- $r \times s$: r é concorrente a s , há um único ponto em comum entre as retas.
- $r \perp s$: r é perpendicular a s , há um único ponto em comum entre as retas e estas formam 90° entre si.

Exercício 04 – Encontre duas retas no plano cartesiano que construímos na sala que são:

- a) Paralelas entre si.
- b) Concorrentes entre si.
- c) Perpendiculares entre si.

Equação reduzida da circunferência

No plano cartesiano, a circunferência que possui centro no ponto (a, b) e raio r tem como equação reduzida:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Em que x, y são as coordenadas que queremos encontrar de todos os pontos que têm distância r do centro (a, b) .

Exercício 05 – Encontre no plano cartesiano que construímos na sala circunferências cujos centros e raios são:

- a) O ponto B com $r = 2$.
- b) O ponto G com $r = 1$.
- c) O ponto P com $r = 5$.

Exercício 06 (PUC – RJ) – O ponto $B(3, b)$ é equidistante aos pontos $A(6, 0)$ e $C(0, 6)$. Logo, o ponto B é?

Exercício 07 (PUC – SP) – Para que $2x - y + 4 = 0$ e $ax - 2y = -c$ sejam equações da mesma reta, os valores de a e c devem ser, respectivamente, iguais a:

- a) -4 e -8
- b) -2 e -4
- c) 1 e 2
- d) 2 e 4
- e) 4 e 8

Exercício 08 (PUC – SP) – As retas de equações $y = 3x + 1$ e $y = 4x + 3m$ são concorrentes em um ponto do eixo x . O valor de m é:

- a) $\frac{9}{4}$
- b) $\frac{4}{3}$
- c) 1
- d) 0
- e) $\frac{4}{9}$

Exercício 09 – Determine a posição do ponto $P(3, -5)$ em relação à circunferência de equação $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$. Isto é, P está dentro ou fora da circunferência?

Exercício 10 – Qual é a equação reduzida da circunferência que passa pela origem e tem o ponto $C(-1, 5)$ como centro?

Exercício 11 (Mackenzie – SP) – O segmento de extremidades $P(2, 8)$ e $Q(4, 0)$ é o diâmetro de uma circunferência cuja equação é:

- a) $(x + 13)^2 + y^2 = 289$
- b) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 85$
- c) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 34$
- d) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 17$
- e) $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 34$

Exercício 12 – Obtenha a interseção da reta $s: x - y + 1 = 0$ com a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$

Referências:

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática: Aula por aula**. São Paulo: Ftd, 2000.

CAVALCANTE, Luciano Moura. **Matemática: geometria analítica i**. 2. ed. Fortaleza: Eduece, 2019.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Exercícios sobre distância entre dois pontos**. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-distancia-entre-dois-pontos.htm>. Acesso em: 02 out. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 5 de outubro

Na sexta-feira, dia 04/10/2024, organizamos as mesas e carteiras da sala onde são realizadas as atividades Promat, com distâncias uniformes entre elas para imitar um plano cartesiano; traçamos uma fita vermelha nas mesas para definir os eixos; e com fita crepe e canetão escrevemos nas coordenadas estipuladas (mesas) hipotéticos pontos cartesianos.

Na manhã do dia 05/10 iniciamos a aula com 12 alunos, e, com o passar do tempo, outros 5 alunos se fizeram presentes. Começamos as explicações sem corrigir as tarefas do dia anterior, pois ninguém comentou que tinha dúvidas da última lista, depois que havíamos perguntado.

Os alunos não tiveram dificuldades para encontrar os pontos, mas alguns deles questionaram qual era o eixo X, e se ele iniciava no zero. Ao abordar o conteúdo de Geometria Analítica tecemos comentários sobre qual era a representação daquelas carteiras e onde os alunos se encontravam no plano cartesiano. Também comentamos sobre suas propriedades, os eixos X e Y, os seus quadrantes e estudo dos seus sinais.

Ao tratarmos da questão de pontos do plano ou coordenadas cartesianas, perguntamos aos alunos que estavam sentados nos pontos específicos, como os pontos A, C e D. Assim, conseguimos trabalhar com distâncias paralelas ao eixo X e ao eixo Y e tratamos de comentar sobre a função módulo, informando-os que representa a distância entre os pontos, ou valor absoluto.

Depois de tratar as representações de distâncias, comentamos sobre distâncias em diagonais, quando o segmento que representa a distância entre os pontos não é paralelo a qualquer dos eixos do plano cartesiano. Tratamos de um triângulo retângulo, e calculamos a distância entre 3 pontos, entre C e A, entre A e D e entre C e D.

Aplicamos o teorema de Pitágoras para descobrir o valor da hipotenusa e medimos seu valor utilizando um barbante com marcações em fita, que foi realiadona noite anterior. A distância entre um ponto e outro era de uma carteira (ou de uma unidade no plano cartesiano).

Entregamos a apostila para os alunos após todas essas atividades, para que copiassem os gráficos, as anotações e respondessem às próximas atividades. Continuamos e aproveitamos para explicar a fórmula geral da reta. Após, foi aplicada a primeira atividade proposta na lista, em que foi dado 15 minutos para que resolvessem.

Ao aplicar a fórmula geral da reta, alguns alunos acabaram cometendo o erro de resolver o quadrado da diferença como $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, então preferimos dar uma ênfase na

discussão sobre essa expressão, e indicamos que resolvam primeiro os parênteses e depois o quadrado. Além disso, corrigimos 3 atividades.

Como notamos que muitos estudantes já estavam realizando a construção do gráfico, enquanto ainda estávamos nas atividades de ponto médio, decidimos que já iríamos para a resolução da construção do gráfico. Durante esta atividade foi explicado como substituir valores para encontrar ambas coordenadas. Os alunos foram participativos nessa atividade, o que nos leva a acreditar que acompanharam bem os cálculos e compreenderam a obtenção de pontos para encontrar a equação da reta.

Durante os minutos finais, os professores pediram para os alunos resolverem o exercício 3 da lista, deixando o tempo para que conseguissem resolver. Foi notado uma dificuldade da parte dos alunos em determinar as equações de reta, com vários deles necessitando de orientação. Faltando 4 minutos para a aula acabar, foi resolvido um dos problemas para ajudar a sanar as dúvidas dos alunos.

No final da aula, decidimos não passar a equação da circunferência por conta do tempo disponível. Preferimos focar nos exercícios e ajudar os alunos com dúvidas. Notamos que eles compreenderam bem os conteúdos mais simples, a exemplo da substituição de pontos para a obtenção de gráficos. No entanto, a obtenção da equação da reta a partir de dois pontos ainda causava dúvidas, as quais foram sendo discutidas até o término da aula.

Por fim, observamos que o plano cartesiano formado pelas carteiras auxiliou alguns alunos a compreenderem os conceitos básicos de ponto, eixo, coordenadas e distâncias, os quais eram fundamentais para a metodologia proposta para o desenvolvimento da aula.

2.7 AULA 07 – Trigonometria I (26/10)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Trigonometria

- Definição de seno, cosseno e tangente.
- Construção da tabela de seno cosseno e tangente de arcos notáveis.

Objetivo Geral:

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Objetivos Específicos: Ao se trabalhar com trigonometria, espera-se que os alunos sejam capazes de:

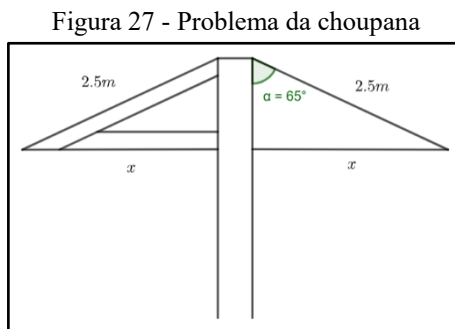
- Calcular seno, cosseno e tangente, dado um triângulo e seus lados.
- Resolver exercícios aplicando a trigonometria.
- Memorizar a tabela com relações trigonométricas dos arcos notáveis.

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, papel sulfite, transferidor, régua, lista de exercícios impressa, papel milimetrado, globo terrestre, bola de isopor, lanterna, laser, trena.

Introdução

Antes da aula iniciar, as carteiras serão dispostas de modo que os estudantes formem grupos para trabalharem em conjunto durante a aula. Os professores irão iniciar as atividades realizando a chamada e reservando 10 minutos iniciais para auxiliar com alguma dúvida que tenha surgido durante a resolução dos problemas da aula passada. Feito isso, o primeiro problema que motivará a aula abordará a construção de uma choupana.

Problema 01: Você irá construir uma choupana de madeira, utilizando um pilar de concreto já construído para isso. A construção será feita de acordo com a seguinte figura:



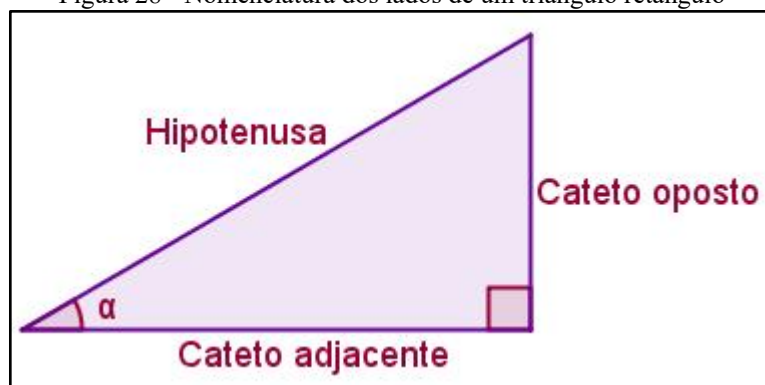
Fonte: Autores, GeoGebra, 2024

Sabendo que as madeiras do telhado foram compradas com um comprimento de 2,5 metros, qual será o tamanho x sob a cobertura?

Comentários do problema: para que os alunos resolvam essa atividade, serão fornecidos a eles papel milimetrado, transferidor e régua. O intuito é que os alunos desenhem um triângulo retângulo semelhante ao do problema no papel milimetrado e meçam o valor do cateto utilizando uma régua. Com uma regra de três simples, é possível encontrar a resposta para o problema. O objetivo do problema 01 é fazer os estudantes perceberem que, quando trabalhamos com triângulos retângulos semelhantes, a razão entre dois lados correspondentes é a mesma. O que será feito na sequência é definir tais razões como seno, cosseno e tangente.

Definição: Considere um triângulo retângulo que possui um ângulo α diferente de 90° . O lado oposto ao ângulo de 90° é chamado de **hipotenusa** (maior lado); o lado oposto a α é denominado **cateto oposto a α** e o outro lado é o **cateto adjacente a α** .

Figura 28 - Nomenclatura dos lados de um triângulo retângulo



Fonte: www.escolakids.uol.com.br. Acesso em 05/09/2024

Definição (razões trigonométricas): em um triângulo retângulo com um dos ângulos medindo α , definimos as razões seno, cosseno e tangente da seguinte maneira:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Com essa definição, falaremos aos alunos que é possível calcular o seno, cosseno e tangente dos ângulos, dados os lados de um triângulo retângulo que tenha este ângulo como um dos seus e aplicando a definição. Em seguida, mostraremos a eles uma tabela com vários valores para seno e cosseno e explicar como as pessoas utilizavam essas tabelas antes da invenção de

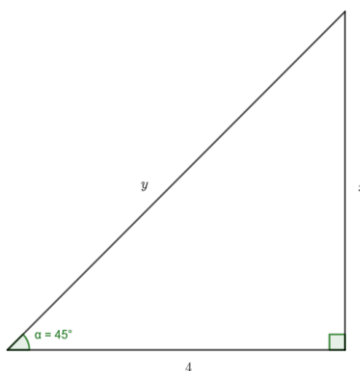
calculadoras ou computadores. A tabela disponível em <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/seno-cosseno-tangente-angulos.htm> será projetada para que haja o debate em sala.

O valor do seno de 65° será consultado e os alunos irão comparar seus resultados obtidos no exercício 01 com o presente na tabela.

Após a explicação da tabela, serão trabalhados alguns exercícios envolvendo seno, cosseno e tangente. Essas atividades já estarão presentes na apostila dos estudantes e serão trabalhadas como segue abaixo:

Exercício 01 - Considere o seguinte triângulo retângulo:

Figura 29 - Triângulo retângulo

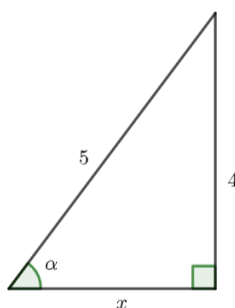


Fonte: Autores, GeoGebra, 2024

Quanto mede o lado x ? E qual é a medida do lado y ? **Respectivamente, 4 e aproximadamente 5,656.**

Exercício 02 - Analise o seguinte triângulo retângulo:

Figura 30 - Triângulo retângulo

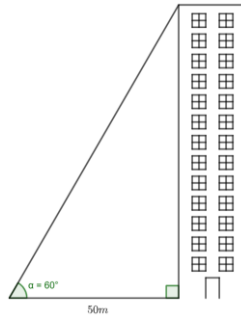


Fonte: Autores, GeoGebra, 2024

- Quanto mede o lado x do triângulo? **3**
- Qual é, aproximadamente, a medida do ângulo α ? **Aproximadamente 53°**

Exercício 03 - Você está a uma distância de 50 metros de um prédio. Utilizando uma ferramenta, você mede o ângulo entre o chão e o topo do prédio e o ângulo é de 60° . A figura abaixo ilustra a situação:

Figura 31 - Triângulo retângulo



Fonte: Autores, 2024

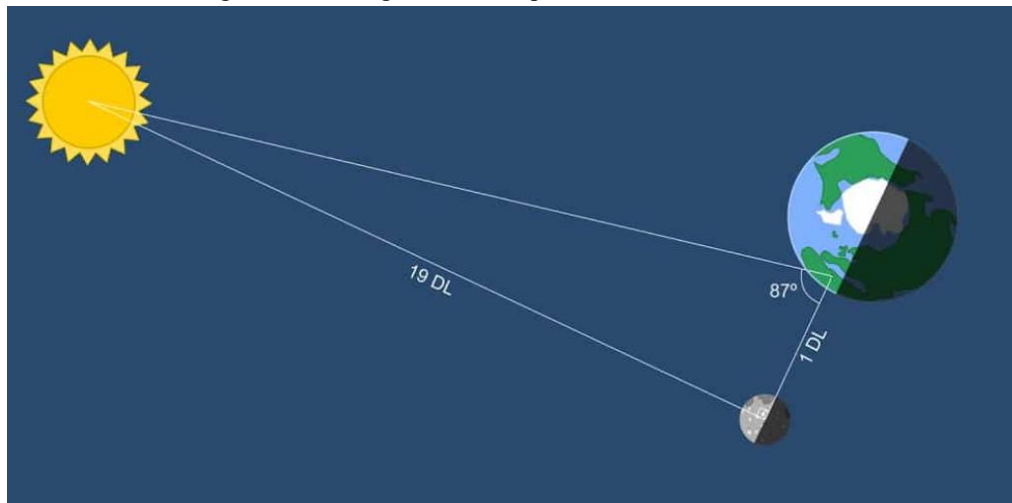
Qual é a altura do prédio? **Aproximadamente 86,6 metros.**

Comentários dos exercícios: O intuito é trabalhar com a tabela previamente passada aos alunos. O primeiro exercício, sabendo a medida do ângulo, consultamos a tabela para achar o valor das razões trigonométricas. No segundo, fazemos o contrário: a partir dos valores de seno e cosseno, consultamos a tabela para determinar qual é o ângulo α . No terceiro, dado um ângulo e um lado, calcularemos o valor do lado oposto pedido usando a tabela de arcos notáveis, o valor do ângulo e de um dos lados.

Será exposto aos alunos um experimento muito famoso na história da astronomia: uma estimativa da distância do Sol até a Terra em comparação com a distância da Lua até a Terra. A história desse experimento será contada utilizando um globo terrestre, uma bola de isopor, para representar a lua, e uma lanterna, para representar o Sol. Também será projetado o aplicativo Stellarium para complementar a fala. Será narrado a seguinte história:

Aristarco de Samos percebeu que, quando a Lua está em fase de quarto crescente, o ângulo entre os segmentos de retas Lua-Terra e Lua-Sol é exatamente 90° . Sendo assim, se medirmos o ângulo entre o Sol e a Lua nesse momento, obteremos outro ângulo do triângulo retângulo com vértices na, Lua, no Sol e no observador. A seguinte figura ilustra essa situação:

Figura 32 - Triângulo formado pela Lua, Sol e observador



Fonte: www.olhardigital.com.br, 2024

O ângulo medido por Aristarco foi de 87° . Com essa informação, será perguntado aos estudantes qual é a distância do observador até o Sol obtida por Aristarco. Para isso, será projetada novamente a tabela com os valores de seno e cosseno, com o intuito que os estudantes utilizem o valor de cosseno de 87° para calcular:

$$\cos(87^\circ) = \frac{1}{dist} \Leftrightarrow dist = \frac{1}{0,0523} = 19,12$$

Logo, o astrônomo concluiu que o Sol está muito mais distante da Terra do que a Lua. Como o tamanho aparente do Sol e da Lua no céu é semelhante, Aristarco notou que o tamanho do Sol deveria ser muito maior do que o da Lua (cerca de 20 vezes mais) e, portanto, maior do que a Terra também. Com esse fato inédito, o filósofo supôs que faria mais sentido o astro menor girar em torno do maior, ou seja, pensou, pela primeira vez na história, que a Terra girava em torno do Sol.

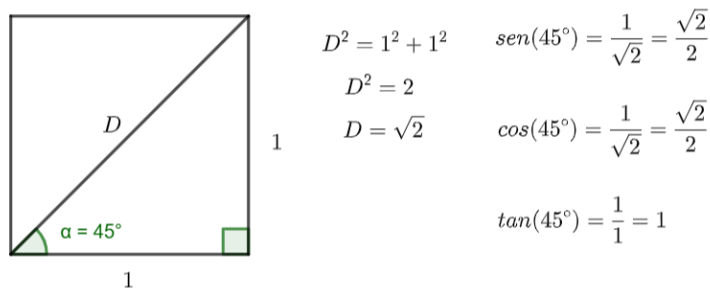
Quando falamos do experimento realizado por Aristarco, não podemos esquecer do grande erro nas suas medições, afinal o Sol não está 20 vezes mais longe do que a Lua, mas sim 380 vezes mais distante. Pediremos para que os estudantes raciocinem e tentem explicar em qual passo o filósofo grego errou, em seguida daremos a resposta. Será dado um tempo para que os grupos cheguem a uma conclusão e os professores estagiários irão passar nas mesas auxiliando-os. Espera-se que as respostas apontem que foi um erro de medição do ângulo.

Depois que os grupos chegarem nas conclusões, os professores irão apontar o erro de medição do ângulo cometido por Aristarco e fornecer um valor mais próximo do ângulo real: $89,85^\circ$. Os docentes comentarão que, por mais que a diferença de $2,85^\circ$ pareça pequena, ela foi a culpada de um erro tão grande. Para explicar esse ponto de maneira mais intuitiva aos estudantes, será utilizado um laser. Um dos professores irá se colocar a uma distância de 1

metro de uma parede da sala e ligar o laser na parede, de modo que ele forme 90° com o anteparo. Aumentando o ângulo de inclinação do laser, a luz alcança uma altura cada vez maior.

Após fazer essa abordagem exploratória utilizando a Astronomia, iremos mostrar, de maneira expositiva, os senos e cossenos dos ângulos de 30° , 45° e 60° . Para o ângulo de 45° , iremos construir um quadrado de lados medindo 1 unidade de medida e reparti-lo em uma de suas diagonais, obtendo dois triângulos idênticos. Aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos que a hipotenusa mede $\sqrt{2}$ e, portanto, podemos achar o seno e o cosseno desse ângulo.

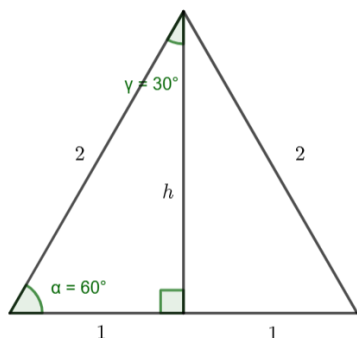
Figura 33 - Obtenção do seno, cosseno e tangente de 45°



Fonte: Autores, GeoGebra, 2024

Para os ângulos de 30° e 60° , iremos construir no quadro um triângulo equilátero e traçar uma de suas alturas, dividindo-o em dois triângulos iguais. Cada um desses triângulos é retângulo e possui ângulos de 30° e 60° . Aplicando novamente o teorema de Pitágoras, achamos a medida do lado faltante (altura do triângulo equilátero) e calculamos o seno e cosseno desses ângulos.

Figura 34 - Obtenção do seno, cosseno e tangente de 30° e 60°



$$2^2 = h^2 + 1^2$$

$$4 = h^2 + 1$$

$$h^2 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$

$$\text{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan}(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos}(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{tan}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Fonte: Autores, GeoGebra, 2024

Na apostila dos estudantes, a seguinte tabela estará posta em branco para que seja preenchida.

Construção da tabela de ângulos notáveis

Tabela 2 - Relações trigonométricas dos ângulos notáveis

α	30°	45°	60°
$\text{sen } \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\text{cos } \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tag } \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

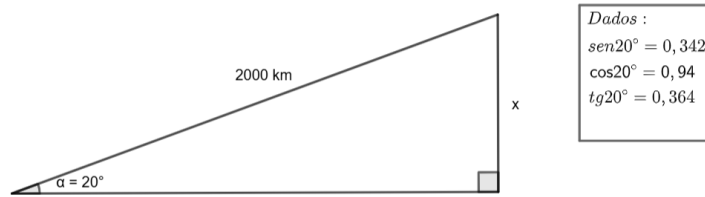
Fonte: Autores, 2024

Para finalizar a aula, serão trabalhados os seguintes exercícios com os estudantes:

Lista de Exercícios

- 1- Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 20° após percorrer 2000 metros em linha reta. De quanto aproximadamente, será a altura atingida pelo avião?

Figura 35 - Problema do avião



Fonte: Autores, 2024

R: 684m

- 2- (ENEM 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Figura 36 - Prédio



Fonte: Enem, 2013

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

- a) Menor que 100m^2 .
- b) Entre 100 m^2 e 300 m^2 .
- c) Entre 300 m^2 e 500 m^2 .
- d) Entre 500 m^2 e 700 m^2 .
- e) Maior que 700 m^2 .

O segmento AB divide a face do prédio em dois triângulos retângulos, sabendo que o ângulo B é igual a 15° e conhecendo o cateto adjacente a ele, é possível calcular o tamanho da base utilizando a tangente.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$0,26 = \frac{x}{114}$$

$$0,26 \times 114 = x$$

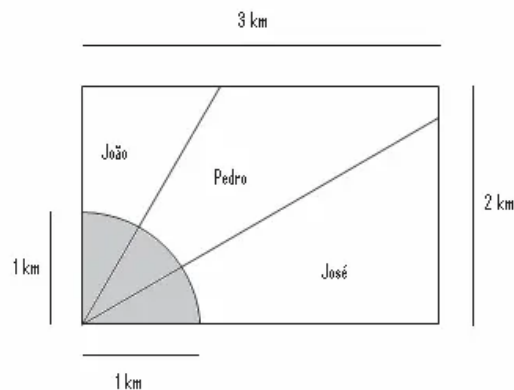
$$x = 29,64 \text{ m}$$

Como a base é um quadrado, a sua área será igual ao lado quadrado, então, temos que

$$A = 29,64^2 = 878,53 \text{ m}^2$$

3- (ENEM 2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

Figura 37 - Terreno para dividir



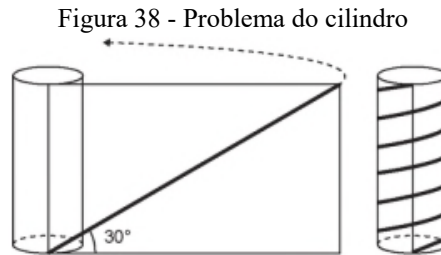
Fonte: Enem, 2009

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

(Considere $\operatorname{tg}(30^\circ) = 0,58$)

- a) 50%
- b) 43%
- c) 37%
- d) 33%
- e) 19%

- 4- (ENEM 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $6/\pi$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.

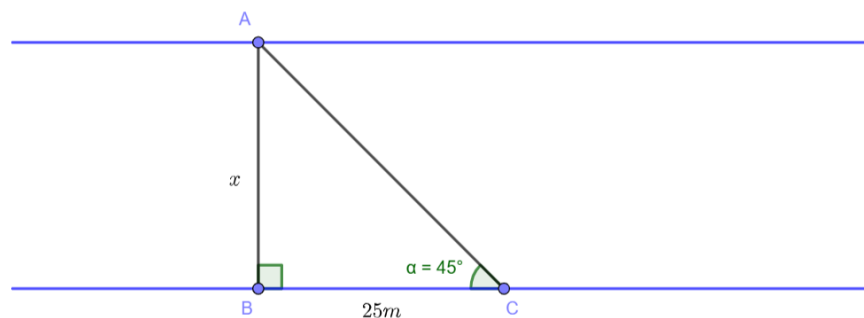


Fonte: Enem, 2018

O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

- A) $36\sqrt{3}$
 - B) $24\sqrt{3}$
 - C) $4\sqrt{3}$
 - D) 36
 - E) 72
- 5) Um matemático deseja saber a largura x de um rio. Para isso, ele fixa um objeto A na margem oposta a ele e, a partir do ponto B, caminha 25 metros para a esquerda até que o ângulo $B\hat{C}A$ seja de 45° . A figura abaixo ilustra esse processo:

Figura 39 - Medição do rio usando trigonometria



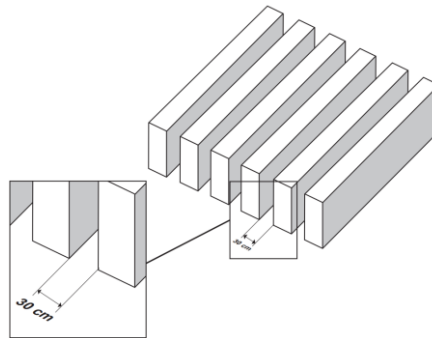
Fonte: Autores, GeoGebra, 2024

Qual é a largura do rio encontrada? **25 metros**

Comentários da questão: a última questão foi retirada do vídeo de Domingos dos Santos Neto, disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hUtHIRQcdgM>. Após a resolução desse exercício, iremos utilizar o multimídia e passar o vídeo para os estudantes.

- 6) (Enem 2020) Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.

Figura 40 - Problema entrada de luz



Fonte: Enem, 2020

Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia.

Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de

- a) 9
- b) 15
- c) 26
- d) 52
- e) 60

Referências:

HELERBROCK, Rafael. **História da Astronomia**. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/a-historia-astronomia.htm>. Acesso em: 20 out. 2024.

LUIZ, Robson. **Seno, cosseno e tangente**. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/seno-cosseno-tangente-angulos.htm>. Acesso em: 24 out. 2024.

Medir Tamanho do Rio Sem Usar Matemática. Roteiro: Domingos dos Santos Neto. Barra do Corda: Youtube, 2024. Color. Disponível em:
<https://www.youtube.com/watch?v=hUtHIRQcdgM>. Acesso em: 20 out. 2024.

NASCIMENTO, Maria Isabel Moura. **Aristarco de Samos**. Disponível em:
https://histedbrantigo.fe.unicamp.br/navegando/glossario/verb_b_aristarco_de_samos.htm. Acesso em: 24 out. 2024.

ZURITA, Marcelo. **Como a distância entre a Terra e o Sol foi calculada**. 2022. Disponível em: <https://olhardigital.com.br/2022/05/22/colunistas/como-a-distancia-entre-a-terra-e-o-sol-foi-calculada/>. Acesso em: 23 out. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 26 de outubro

Nos 10 primeiros minutos da aula deste sábado retomamos o assunto da aula do dia 05/10/2024 pois, nessa interrupção das atividades, os alunos acabam esquecendo alguns assuntos. Não surgiram dúvidas nos exercícios até então apresentados, mas uma aluna aproveitou o momento para tirar dúvidas conceituais sobre um tópico que não abordamos na aula passada e que ela pesquisou por conta. Após, iniciamos a aula com 10 alunos. Por conta do Aulão do vestibular da Unioeste, notamos que em todas as salas tinham poucos alunos, e por conta disso, os professores-estagiários da turma 5, por terem apenas 2 alunos em sala, solicitaram à professora Dulcyene se poderiam juntar todos em uma única sala. Feito isso, realizamos as atividades propostas com 7 professores-estagiários e 12 alunos.

Por conta dessa mudança, ocorreram alguns imprevistos, pois é difícil de se organizar as atividades com 7 professores-estagiários. Para uma nova composição, nos 15 primeiros minutos realizamos uma introdução da questão do exercício da choupana proposta no plano e, concomitantemente repassamos aos professores-estagiários da sala 5 o nosso Plano de Aula, e o que cada um poderia fazer para ajudar.

Os alunos conseguiram compreender a ideia de proporção entre o desenho e a medida real da construção. Todos os estudantes resolveram o problema utilizando regra de três.

Após terminar esta atividade, realizamos as relações com o triângulo retângulo, dando nome aos seus lados, chamando-os de catetos e hipotenusa. Com o auxílio do quadro e da lista de atividades, fizemos as relações com a primeira questão da lista e depois denotamos as razões trigonométricas que encontramos neste triângulo.

Depois disso, projetamos a tabela disponível no site <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/seno-cosseno-tangente-angulos.htm> com os ângulos de 1° - 99° que os antigos matemáticos utilizavam quando não se tinha calculadoras. Com a tabela, procuramos qual era o valor do $\text{sen}(65^\circ) = 0,9093$, e multiplicando esse valor por 2,5m, pois este é o valor da hipotenusa do triângulo que a choupana forma e precisávamos descobrir o valor do lado oposto ao ângulo dado, conseguimos assim chegar numa aproximação muito boa.

Solicitamos então que os alunos seguissem resolvendo as atividades da lista de exercícios e pedimos para que os professores-estagiários da sala 5 resolvessem no quadro as questões 01, 02 e 03.

Notamos que na questão 01 os alunos resolveram de duas formas, uns utilizaram o valor da tangente tabelado de 45° e assim conseguiram o valor do lado x ; outros notaram que como um dos ângulos era de 90° e o outro é 45° , somando todos os ângulos $\theta + 45 + 90 = 180$, assim $\theta = 45$. Logo ambos os ângulos são 45° , e como um dos lados tem valor 4, o outro lado também é igual, ou seja, valor 4. E para encontrar o y utilizamos o teorema de Pitágoras, $y^2 = 4^2 + 4^2$, obtendo-se que $y = \sqrt{32}$ ou $y = 4\sqrt{2}$.

Na questão 02, o objetivo era fazer o processo inverso, e os alunos teriam os valores dos lados e precisariam encontrar o valor do ângulo. Assim, com o valor dado da hipotenusa e do cateto oposto, poderiam calcular o valor do seno daquele ângulo. Com o valor obtido, eles procuraram na tabela um ângulo aproximado, que resultou em 53° . E para encontrar o cateto adjacente empregou-se o teorema de Pitágoras, $5^2 = 4^2 + x^2$ ou seja obtendo-se $x = \sqrt{9} = 3$.

Em seguida seguimos para a próxima atividade, para a explicação do experimento de Aristarco. Que durou cerca de 40 minutos. Para isso, utilizamos um globo terrestre escolar para representar a Terra, uma lanterna para representar o Sol e uma bola de isopor para representar a Lua.

Aristarco utilizou trigonometria, suas observações e raciocínio lógico para deduzir que o Sol é muito maior do que a Terra sua solução foi exposta aos estudantes com o auxílio dos materiais concretos mencionados anteriormente. A explicação iniciou no primeiro horário, mas 10 minutos após seu início, ocorreu o intervalo. Após a pausa, prosseguimos com a fala planejada.

No início da discussão da solução de Aristarco, fizemos discussões preliminares a respeito de Astronomia. Por exemplo, explicamos por que dias e noites se sucedem devido à rotação da Terra e por qual motivo a Lua apresenta diferentes fases.

Em toda atividade, os alunos tiveram mais dificuldade de compreensão da construção do triângulo com vértices Terra, Lua e Sol e no entendimento de que, quando vemos metade da Lua iluminada, significa que esse triângulo é retângulo. Essa exposição foi feita por meio de desenhos no quadro, conforme a imagem que está no plano de aula da posição da Terra, Lua e Sol.

Quando os estudantes foram solicitados a realizar as contas com o ângulo encontrado por Aristarco, a maioria soube aplicar corretamente as relações trigonométricas. Também solicitamos que calculassem a distância da Terra até o Sol levando em consideração a medição

mais precisa do ângulo ($89,85^\circ$). O segundo cálculo teve uma participação menor, sendo que o segundo cálculo era muito semelhante ao primeiro, ficando redundante.

Na discussão final sobre o erro cometido por Aristarco decidimos discutir que o erro estava na aproximação da medição realizada. Fizemos isso pois acreditamos que seria melhor para o andamento da aula e para o controle do tempo disponível. Os alunos compreenderam a utilização do laser para a representação do diagrama Terra-Lua-Sol e a ideia principal dessa atividade, que é a de que, quando um dos ângulos de um triângulo retângulo fica muito próximo de 90° , pequenas variações nesse ângulo causam grandes variações no tamanho do cateto oposto a ele.

Após essa explicação, iniciamos a segunda parte da aula, e nela alguns alunos já tinham o conhecimento prévio de como obter a tabela dos arcos notáveis a partir de figuras geométricas, tal como fizemos em sala. Para outros, nossa exposição foi uma novidade e ajudou na compreensão teórica e na memorização da tabela. Para auxiliar na memorização, decidimos também passar para os estudantes uma breve música utilizada para decorar os arcos notáveis.

Na lista final de exercícios, fornecemos cerca de 15 minutos para que os estudantes ficassem livres para responder aos problemas programados para avaliação da compreensão dos conteúdos. Quase todos os alunos conseguiram realizar pelo menos 4 exercícios, que é uma quantidade boa, segundo nossa avaliação, e que ilustrou um bom entendimento do conteúdo tratado nesta aula por parte dos alunos. Ao final dos 15 minutos, fizemos a correção de 2 problemas que mais geraram dúvidas e chamamos 2 alunos ao quadro para que mostrassem suas resoluções para o restante da classe. A participação e explicação de ambos foram boas de modo que ficamos contentes com o retorno positivo por parte dos estudantes. Logo que a correção foi concluída liberamos os alunos encerrando as atividades.

2.8 AULA 08 – Trigonometria II (09/11)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Trigonometria

- Construção do número irracional π
- Arcos
- Ângulos
- Círculo trigonométrico

Objetivo Geral:

(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem trigonometria e círculo trigonométrico, identificando arcos congruentes, diferenciando o Radiano do Grau e reconhecendo os quadrantes do círculo trigonométrico, assim como seus sinais.

Objetivos Específicos:

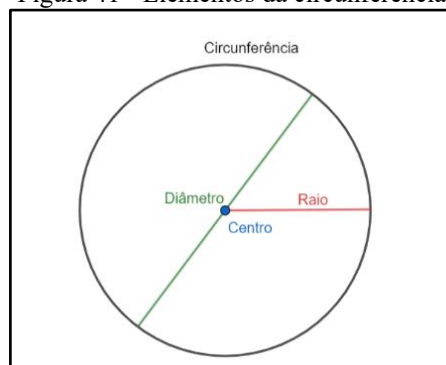
- Entender a construção de um círculo trigonométrico
- Identificar a diferença entre Radiano e Grau, e suas conversões.
- Entender o que são arcos côngruos
- Reconhecer o sinal de cada quadrante do círculo trigonométrico.

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, papel sulfite, transferidor, régua, lista de exercícios impressa.

Atividade inicial – Obtendo se o número π (25 minutos)

Na aula anterior e pelo grupo de mensagens, vamos pedir para que os alunos tragam pequenos objetos redondos que tiverem em casa. Antes de começarmos a atividade, vamos relembrar alguns elementos importantes da circunferência, conforme a figura:

Figura 41 - Elementos da circunferência



Fonte: Autores, Geogebra, 2024

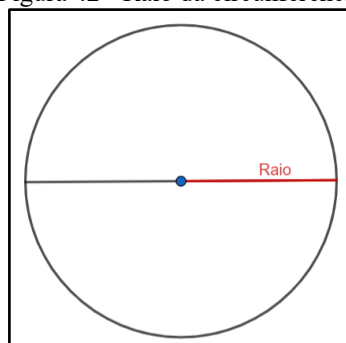
Observação: Note que a medida do diâmetro sempre será o dobro da medida do raio!

Com a ajuda de um barbante e régua, pediremos para que eles possam medir o comprimento da circunferência desses objetos e o seu diâmetro e em seguida preencher o quadro:

Nome objeto	Comprimento da circunferência	Diâmetro	Razão entre comprimento e diâmetro da circunferência
Média dos valores obtidos:			

Comentário: A ideia é que os alunos consigam encontrar um valor próximo ao de π ao calcular a média das razões entre o comprimento e o diâmetro das circunferências dos objetos. Para que consigam verificar como este valor se relaciona com os ângulos que são expressos em radianos, vamos fazer a construção de π radianos no quadro. Pediremos para que os alunos usem o desenho de uma circunferência feita no caderno de raio 4 cm e marquem o raio e o diâmetro desta circunferência, como na figura:

Figura 42 - Raio da circunferência



Fonte: Autores, Geogebra 2024

Vamos pedir para que os alunos meçam novamente o raio com um barbante agora e coloquem esta medida sobre a circunferência, marcando sobre a circunferência. Vamos explicar que esta medida representa uma medida de ângulo chamada de radiano.

Definições:

- 1- **Ângulo:** é a região do plano limitada por duas semirretas de mesma origem.

- 2- **Arco:** é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.
- 3- **Radiano:** é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência correspondente.
- 4- **Grau:** é cada uma das 360 partes iguais da divisão de uma circunferência.

Pediremos para que verifiquem que o raio “cabe” 3 vezes na metade do comprimento da circunferência e ainda falta um pequeno espaço antes de chegar na metade. Explicaremos que este valor (três mais este espaço pequeno) é exatamente π . Por isso, dizemos que $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

Exercício 1 – Faça a conversão de ângulos de radianos para graus ou de graus para radianos.

- | | | | |
|----------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| a) $\frac{\pi}{2}$ R: 90° | e) $\frac{3\pi}{2}$ R: 270° | i) $\frac{2\pi}{3}$ R: 120° | m) 225° R: $\frac{5\pi}{4}$ |
| b) 60° R: $\frac{\pi}{3}$ | f) 150° R: $\frac{5\pi}{6}$ | j) 135° R: $\frac{3\pi}{4}$ | n) 315° R: $\frac{7\pi}{4}$ |
| c) $\frac{\pi}{6}$ R: 30° | g) $\frac{5\pi}{4}$ R: 245° | k) $\frac{7\pi}{6}$ R: 210° | o) 240° R: $\frac{4\pi}{3}$ |
| d) 45° R: $\frac{\pi}{4}$ | h) 2π R: 360° | l) $\frac{11\pi}{6}$ R: 330° | p) $\frac{5\pi}{3}$ r: 300° |

Arcos côngruos

Perguntaremos aos alunos o que eles entendem que seja o significado da palavra “congruência”. Explicaremos que congruência se refere a 2 objetos que possuem uma coincidência ou uma correspondência de características.

Definição: Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade.

Exemplos:

- 0° é um arco côngruo a 360° .
- 390° é côngruo a 30° .

Quando trabalhamos com ângulos, muitas vezes podemos utilizar valores mais simples, com os quais temos mais informações para calcular relações como o seno, cosseno e a tangente. Por isso, procuramos pela primeira determinação positiva, que é o menor valor positivo de um ângulo côngruo ao procurado, como no exemplo do ângulo de 390° . É mais fácil encontrar sua primeira determinação positiva (30°) e trabalhar com as informações que já temos deste ângulo.

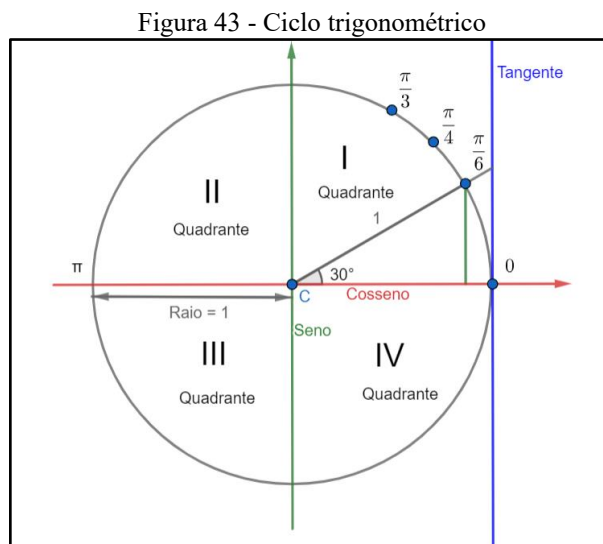
Exercício 2 – Calcule a primeira determinação positiva dos arcos a seguir:

- | | | |
|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| a) 1470° R: 30° | c) 1125° R: 45° | e) $-\frac{7\pi}{2}$ R: 270° |
| b) 1200° R: 120° | d) 6π R: 0° | f) -410° R: 50° |

Vamos mostrar como se calcula a primeira determinação positiva apenas do primeiro item, dizendo que podemos dividir o ângulo por 360° , assim veremos quantas voltas completas este ângulo fará. O resto desta divisão corresponde à primeira determinação positiva deste ângulo.

Construção do círculo trigonométrico (45 minutos)

Vamos explicar que o círculo trigonométrico é usado para relacionar ângulos e números reais com as relações trigonométricas, de forma visual. Em papel milimetrado, vamos pedir para que construam primeiramente um plano cartesiano. Em seguida, construiremos uma circunferência de centro na origem do plano cartesiano e os demais elementos do círculo trigonométrico.



Fonte: Autores, Geogebra, 2024

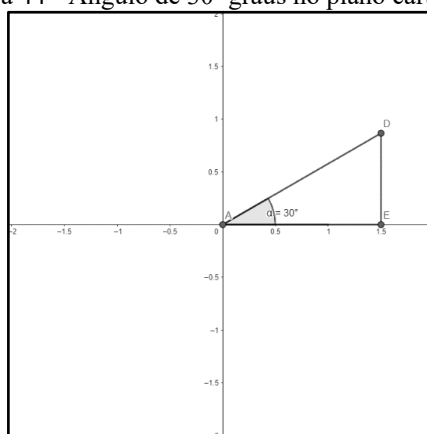
Elementos do círculo trigonométrico

- 1) Plano cartesiano
- 2) Circunferência de centro (0,0) e raio 1
- 3) I, II, III e IV quadrantes
- 4) Eixo dos cossenos está no eixo X
- 5) Eixo dos senos está no eixo Y
- 6) Eixo das tangentes é paralelo ao eixo dos senos e passa pelo ponto (1,0)
- 7) Sentido positivo é anti-horário
- 8) Origem dos arcos relacionados com os números reais se dá no ponto (1,0)

Observação 1: Por que o eixo X corresponde aos valores dos cossenos e o eixo Y aos valores dos senos?

Veja que, no exemplo do arco de 30° (ou $\frac{\pi}{6}$ rad), encontramos um triângulo retângulo.

Figura 44 - Ângulo de 30° graus no plano cartesiano



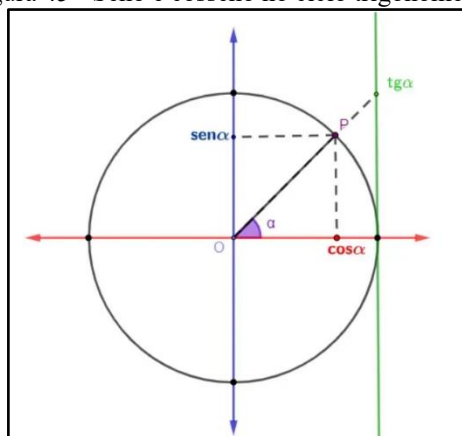
Fonte: Autores, Geogebra, 2024

Neste triângulo, o cateto oposto ao ângulo de 30° é paralelo ao eixo Y e o cateto adjacente está sobre o eixo X. Portanto, quando formos calcular o seno de 30°, a medida do cateto oposto estará coincidindo com as medidas do eixo Y e quando formos calcular o cos de 30° a medida do cateto adjacente também coincidirá com as medidas do eixo X. Além disso, como a hipotenusa tem medida igual a 1, pois coincide com o raio da circunferência, temos que o seno e cosseno serão as próprias medidas dos eixos Y e X.

Observação 2: Por que o eixo das tangentes deve ser paralelo ao eixo Y passando pelo ponto (1,0)?

Observe a figura:

Figura 45 - Seno e cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Autores, Geogebra, 2024

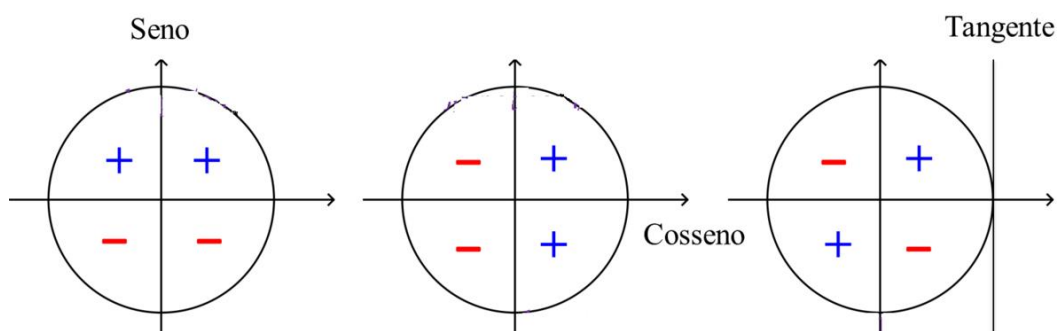
Ao prolongarmos a semirreta que define o ângulo, encontramos um ponto de interseção com esta reta tangente que traçamos. Como vimos na aula passada, as relações trigonométricas sempre terão o mesmo valor para qualquer triângulo, desde que se tenha o mesmo ângulo, por isso, o novo triângulo encontrado ao prolongar a semirreta terá tangente igual ao triângulo

inicial. Como $tg(x) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$, e o cateto adjacente deste triângulo tem tamanho 1, encontramos que o valor do cateto oposto (valor encontrado no eixo da tangente traçado), será o valor da tangente deste ângulo.

Estudo do sinal em cada quadrante

De acordo com o estudo do plano cartesiano, faremos o estudo de sinal em cada quadrante de cada relação trigonométrica no quadro para que eles anotem em seus cadernos:

Figura 46 - Sinais que as funções Seno, Cosseno e Tangente assumem em cada quadrante



Fonte: http://www.educabras.com/media/emtudo_img/upload/_img/20110223_141808.gif, 2024

Exercício 3 – Construa o que se pede:

- Com uma folha quadriculada, construa uma circunferência, de raio $r = 1$, centrada no ponto $O = (0,0)$ de um plano cartesiano;
- Meça, com o auxílio do transferidor, e marque os seguintes ângulos (considerando que o ângulo 0° é o ângulo que está sobre o eixo positivo das abcissas): $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ$ e 360° . Expresse esses valores em graus e em radianos;
- Trace uma reta tangente ao ponto $A = (1,0)$, sendo que essa será utilizada para medir a tangente de um ângulo;
- Encontre o seno, cosseno e tangente de todos os ângulos construídos.
- Explique como encontrar o valor do seno e cosseno dos ângulos de $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ e 360° .

Comentário: A intenção é que eles entendam que, partindo dos ângulos de $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ e 180° , é possível calcular o seno, cosseno e tangente de todos os outros ângulos construídos, comparando as medidas dos eixos X e Y . A pergunta E será feita para ajudar os alunos a memorizarem a importância destes valores, o que será usado na próxima aula sobre funções trigonométricas.

Esperamos que os alunos tenham algumas possíveis respostas, como por exemplo, adicionar $30^\circ + 30^\circ + \dots$ até chegar nos 360° e concluir o círculo, e no meio desse processo, queremos que

eles observem que o ângulo que corresponde às medidas de seno e cosseno de 30° no segundo quadrante seria o 150° , ou então observar pela simetria do desenho.

Redução ao 1º quadrante

- α está no 2º quadrante: calcular $180^\circ - \alpha$ e fazer o estudo do sinal no quadrante;
- α está no 3º quadrante: $180^\circ - \alpha$ e fazer o estudo do sinal no quadrante;
- α está no 4º quadrante: $360^\circ - \alpha$ e fazer o estudo do sinal no quadrante.

Exercício 4 – Calcule, reduzindo ao primeiro quadrante:

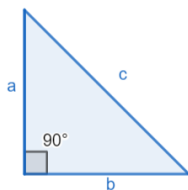
a) $\cos 5\pi/4$ c) $\cos 5\pi/6$

b) $\sin 11\pi/6$ d) $\operatorname{tg} 35\pi/4$

Relação fundamental da trigonometria

Veja também que, no triângulo retângulo, vale o teorema de Pitágoras. Dado qualquer triângulo retângulo, temos que $a^2 + b^2 = c^2$.

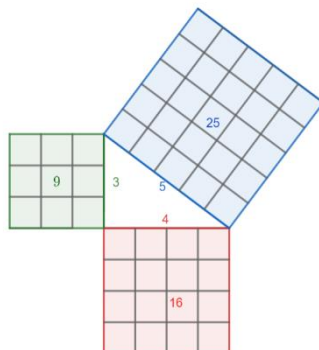
Figura 47 - Triângulo retângulo de lados a, b e c



Fonte: Autores, Geogebra, 2024

Uma explicação para isso encontra-se na figura:

Figura 48 - Representação do teorema de Pitágoras



Fonte: Autores, Geogebra, 2024

Assim, no círculo trigonométrico, encontraremos a relação:

$$\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{cos}^2(x) = 1$$

Exercício 5 – (Vunesp) A expressão $\frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta}$, com $\sin \theta \neq 1$, é igual a:

- a) $\sin \theta$
- b) $\sin \theta + 1$**
- c) $\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta$
- d) 1
- e) $\frac{\sin \theta}{\sec \theta}$

Soma e Diferença de arcos (20 minutos)

Para calcular a soma ou a diferença entre dois arcos trigonométricos, utilizamos as fórmulas:

Quadro 12 - Soma e diferença de arcos

	SOMA	DIFERENÇA
SENO	$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$	$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
COSENSO	$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

Fonte: Autores

Vale lembrar também da paródia do poema Canção do Exílio

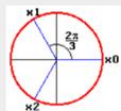
“Minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá. Seno a cosseno b, seno b cosseno a”
(atentar-se para o sinal, o mesmo que está sendo feito)

E a outra rima também para o cosseno:

“Coça a coça b, senta a senta b” (atentar-se para sinal, sempre o oposto do que está sendo feito)

Lista de Exercícios

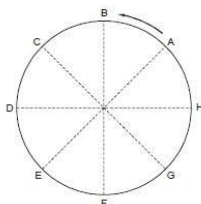
- 1- Marcar no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas $x = \frac{2k\pi}{3}$, em que k é um número inteiro.



Para para cada k , obtemos as medidas dos arcos:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= 2\pi/3 \\x_2 &= 4\pi/3 \\x_3 &= 6\pi/3 = 2\pi\end{aligned}$$

- 2- Os ponteiros de um relógio marcam duas horas e vinte cinco minutos. Determine o menor ângulo entre os ponteiros.
- 3- Em uma oficina de matemática, o professor orientou aos alunos que desenhassem uma circunferência em seus cadernos de raio 10 cm. E depois dividiu a circunferência em 8 partes do mesmo tamanho como mostra a figura abaixo.



Os alunos construíram com régua e transferidor a figura acima, dividindo os ângulos do mesmo tamanho.

Quando haviam terminado a construção o professor lançou dois desafios.

- Determine a medida de cada um dos 8 arcos em graus e em radianos.
- Determine o comprimento do arco AF.

- 4- (FUVEST) O menor valor de $\frac{1}{(3-\cos x)}$ com x real, é:

- 1/6.
- 1/4.
- 1/2.
- 1.

e) 3.

5- (FESP) Qual é o resultado da expressão:

$$\frac{5 \cos 90^\circ - 4 \cos 180^\circ}{2 \sin 270^\circ - 2 \sin 90^\circ}$$

R:-1

6- Durante o estudo do momento circular, um físico fez a análise de um objeto que estava girando em torno dele mesmo, formando um ângulo de 15.240°. Analisando esse ângulo, o arco formado por ele está em qual quadrante?

Resolução

Sabemos que, a cada 360°, esse objeto completou uma volta em torno dele mesmo. Ao realizar a divisão de 15.240 por 360, encontraremos quantas voltas completas esse objeto deu em torno dele mesmo, mas o nosso maior interesse é no resto, que representa o ângulo em que ele parou.

$$15.240: 360 = 42,333\dots$$

O resultado mostra que ele deu 42 voltas em torno dele mesmo, mas $360 \cdot 42 = 15.120$, então restou um ângulo de: $15.240 - 15.120 = 120^\circ$. Sabemos que 120° é um ângulo do segundo quadrante

7- Julgue as afirmativas a seguir:

I → Ao calcular $Tg 140^\circ$, o valor será negativo.

II → O ângulo de 200° é um ângulo do 2º quadrante.

III → $Sen 130^\circ = Seno 50^\circ$.

Marque a alternativa correta:

A) Somente a I é falsa.

B) Somente a II é falsa.

C) Somente a III é falsa.

D) Todas são verdadeiras."

Alternativa B.

I → Verdadeira, pois o ângulo 140° pertence ao 2° quadrante, no qual a tangente é sempre negativa.

II → Falsa, pois o ângulo de 200° é um ângulo do 3° quadrante.

III → Verdadeira, pois, para fazer a redução de um ângulo do 2° para o 1° quadrante, basta calcular a diferença de $180^\circ - x$, logo:

$$\text{Seno } 130^\circ = \text{Seno } (180^\circ - 130^\circ)$$

$$\text{Seno } 130^\circ = \text{Seno } 50^\circ$$

Referências

MACEDO, Alex de Cassio. **Plano de aula: contornando e esticando a circunferência!**. Disponível em: <https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/7ano/matematica/contornando-e-esticando-a-circunferencia/1489>. Acesso em: 06 nov. 2024.

MANETTA, Marco A. **Seno, Cosseno e Tangente**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/vykepyjm>. Acesso em: 05 nov. 2024.

NOÉ, Marcos. **Arcos com Mais de uma Volta**. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/arcos-mais-de-uma-volta.htm>. Acesso em: 05 nov. 2024.

RIBEIRO, Amanda Gonçalves. **Exercícios sobre Relações Trigonométricas Fundamentais**. Disponível em: <https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-relacoes-trigonometricas-fundamentais.htm>. Acesso em: 06 nov. 2024.

SODRÉ, Ulysses. **Trigonometria: exercícios de círculo trigonométrico**. Exercícios de círculo trigonométrico. Disponível em: <https://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/trigonometria/trigo02a.html>. Acesso em: 05 nov. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 9 de novembro

Na manhã do dia 09/11 iniciamos a aula com 9 alunos e por volta das 8:30 já tínhamos 14. Com o auxílio do barbante e do giz iniciamos as atividades previstas. Com o giz fizemos 2 circunferências no quadro, uma para descrever os elementos: ponto central, raio e diâmetro. Após, utilizando materiais circulares como tampas de potes, fitas adesivas e pratos trazidos, fizemos as medições do diâmetro de suas respectivas circunferências utilizando o barbante e depois medimos seu comprimento utilizando uma régua. Com os valores obtidos, solicitamos para os alunos calcularem a razão entre a medida da circunferência e o raio.

Alguns alunos, quando leram o termo “razão”, perguntaram se “é um menos o outros” ou indicaram “eu não lembro se é para multiplicar ou dividir”. Tecemos comentários de que o “produto” se refere à multiplicação de valores ou quantidades e “razão” se refere à divisão entre valores ou quantidades. Após obterem os resultados, solicitamos aos alunos quais foram os maiores valores numéricos calculados, obtivemos valores como 4, 3,9, 3,7 e então comentamos que estes são números próximos ao π , A média geral foi de 3,43.

Seguindo o proposto na apostila, e com o auxílio do papel milimetrado, solicitamos que os alunos desenhassem uma circunferência de raio 4cm no papel fornecido, traçassem o diâmetro e, utilizando um barbante cortado com a mesma medida do raio, pedimos que observassem quantas vezes a medida do raio “caberia” em metade da circunferência, ou seja, quantos arcos de 4 cm “cabem” no arco de 180°, ou de um lado do diâmetro até o outro, sobrepondo a circunferência.

Alguns alunos verificaram que couberam exatamente 3 medidas. Porém, a maioria seguiu o que esperávamos que era medir 3 raios e sobrar um pedaço. Explicamos que isso se dá pelo fato π é um número irracional.

Em seguida explicamos as definições de ângulo, grau e radiano para que os alunos pudessem realizar as atividades de transformação de graus em radianos e reciprocamente. Os alunos conseguiram concluir corretamente as atividades, e a maioria resolveu as atividades de conversão de ângulo para radiano utilizando regra de três. Apenas um aluno resolveu de forma diferente, pois ele notou que era possível apenas separar o ângulo em soma de ângulos que ele sabia os valores em radianos e juntá-los, e um exemplo é $\frac{5\pi}{4}$, que pode ser escrito como $\pi + \frac{\pi}{4}$, então $\frac{5\pi}{4} = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$.

Iniciamos então o conteúdo de arcos cômgruos, explicando-o usando o exemplo de um relógio, e associamos as voltas completas do ponteiro com os ângulos maiores de 360°, e indicamos que é possível associar arcos cômgruos com os dias, discutindo que se considerando

hoje às 13h da tarde, daqui uma hora será 14h; mas se tomássemos 25 horas, seriam 14h da tarde também, mas agora no próximo dia. Essa situação também ocorre nos ângulos congruos, e tomando a exemplo o ângulo de 30° mostra-se que ele é congruo ao ângulo de 390° , pois 390° seria uma volta inteira (360°) mais 30° graus, $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$. Após, oportunizamos mais uns 5 minutos para os alunos resolverem as questões e começamos a resolução de exemplos no quadro.

Para o caso do ângulo de 1470° ; primeiramente dividimos ele por 360° , para obter quantas vezes “inteiras” 1470° pode ser dividida por 360° , ou seja, quantas voltas completas podem ser dadas em 1470° . Mostramos que “cabe” quatro vezes e sobram 30° graus, de modo que o ângulo 1470° pode ser representado por quatro voltas do círculo trigonométrico, mais 30° .

Depois disso, iniciamos a explicação do círculo trigonométrico desenhando alguns de seus elementos no quadro, mas logo tivemos que sair para o intervalo. Após retornarmos do intervalo e já com o círculo desenhado no quadro, continuamos a aula. Destacamos os 4 quadrantes, o eixo da função cosseno e da função seno e fizemos a explicação do motivo de o eixo X corresponde ao eixo dos cossenos e o eixo Y ao eixo dos senos e por que a reta das tangentes precisa estar paralela ao eixo Y e passando pelo ponto $(1,0)$. O raciocínio foi apoiado por meio do desenho de triângulos dentro do círculo trigonométrico para que os alunos vissem que, como o raio da circunferência que corresponde à hipotenusa destes triângulos retângulos construídos sempre tem medida igual a um, os eixos correspondem ao valor do seno e cosseno de cada ângulo. Também mostramos como encontrar a relação fundamental da trigonometria, ligando o conteúdo do círculo trigonométrico com as relações trigonométricas.

Logo após, com o utilizando a lista de exercícios, fizemos o estudo de sinal das funções trigonométricas seno cosseno e tangente. Os alunos resolveram por dois modos: o primeiro descobrindo os sinais de seno e cosseno e depois fazendo regra de sinal para descobrir o da tangente; e o segundo método traçando uma reta e observando onde ela iria encostar no eixo da tangente. Nenhum aluno teve dificuldade de realizar a atividade.

O próximo exercício consistia que os alunos desenharem um círculo trigonométrico e colocassem todos os ângulos congruos dos ângulos notáveis. A construção foi realizada com auxílio do transferidor e do compasso. Notamos que os alunos já não estavam mais motivados para resolver tal exercício, tendo apenas feito o desenho da circunferência e colocado os ângulos, mas não estavam calculando o seno, cosseno e tangente de cada ângulo. Alguns alunos perguntaram “Mas vamos ter que calcular todos? São muitos!”, no que explicamos que, observando a simetria do círculo trigonométrico, eles notariam que não precisariam calcular o valor de cada um deles, pois só precisariam lembrar dos ângulos notáveis.

Com deste comentário, os alunos começaram a resolver o solicitado. Como alguns alunos tinham faltado na aula anterior e não se lembravam do seno cosseno e tangente dos ângulos notáveis, explicamos novamente para eles. Mas os alunos que estiveram presentes na última aula não tiveram dificuldade de lembrar da tabela dos ângulos notáveis. Tivemos que ficar incentivando-os nas respectivas mesas para que efetivamente realizassem o exercício, o que foi positivo, pois eles conseguiram perceber a simetria e, assim, resolveram o exercício.

Após a resolução deste exercício no quadro, e visto que alguns minutos sobrando no horário previsto, encerramos a aula fazendo no quadro mais uma tabela de seno e cosseno de outros ângulos que usaremos na próxima aula (0° , 90° , 180° , 270° e 360°). Pedimos ajuda dos alunos para completar a tabela com os valores do seno e cosseno e para que explicassem por que estas medidas eram sempre -1, 0 ou 1, o que foi realizado sem dificuldades. Em sequência, um aluno perguntou se poderíamos verificar quais são os valores da tangente para os mesmos ângulos do exercício anterior o que foi muito útil para todos. Mostramos geometricamente que não existem as tangentes dos ângulos de 90° e 270° , pois as retas que deveriam interceptar a reta tangente e nos dar o valor da tangente são paralelas à própria reta tangente, que passa pelo ponto $(1,0)$.

2.9 AULA 09 – Funções Trigonométricas (23/11)

Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos inscritos no Promat.

Tempo de execução: 3 horas e 30 minutos.

Conteúdo: Funções trigonométricas

- Revisão sobre definição de função.
- Gráfico da função seno, cosseno e tangente.
- Período, amplitude, imagem das funções trigonométricas.

Objetivo Geral:

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de funções trigonométricas sabendo identificar o que compõem a função, podendo utilizar o GeoGebra

Objetivos específicos: Ao se trabalhar com funções trigonométricas, objetiva-se que o aluno seja capaz de:

- Entender como as funções se comportam
- Identificar o domínio, imagem e período de uma função
- Construir os gráficos pela lei de formação da função

Recursos Didáticos: Apostila produzida pelos autores, quadro, giz, papel sulfite, transferidor, régua, lista de exercícios impressa, jogo do Dorminhoco modificado.

Construção dos gráficos (60 minutos)

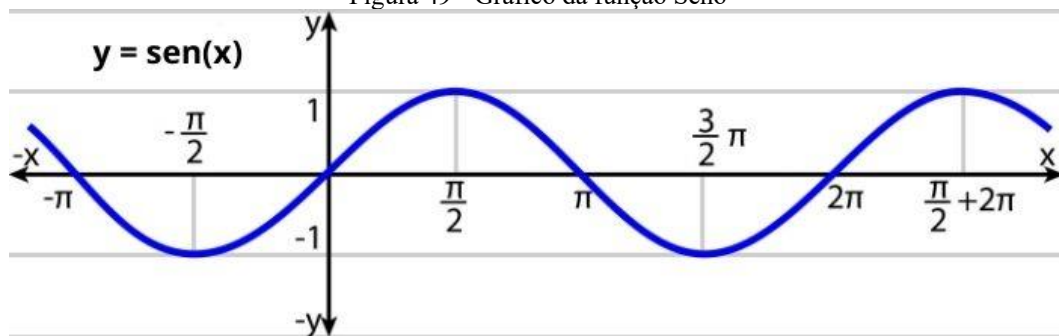
Retomaremos o círculo trigonométrico, que trabalhamos na aula anterior para iniciar a aula. Em seguida, construiremos uma tabela com os valores da função seno, cosseno e tangente em alguns pontos. Depois disso, utilizando a tabela será solicitado aos alunos que construam o gráfico da função seno.

Tabela 3 - Valores da função seno, cosseno e tangente

x	$0rad^{\circ}$	$\frac{\pi}{4}rad$	$\frac{\pi}{2}rad$	$\frac{3\pi}{4}rad$	πrad	$\frac{5\pi}{4}rad$	$\frac{3\pi}{2}rad$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi rad$
sen (x)	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
cos (x)	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
tg (x)	0	1	∞	-1	0	1	∞	-1	0

Fonte: Autores, 2024

Figura 49 - Gráfico da função Seno



Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm>, 2024

Depois de construir o gráfico, discutiremos com os alunos sobre o que é função, domínio e imagem e vamos reconhecer estes conceitos partindo do gráfico do seno.

Função: é a relação $f: A \rightarrow B$ (lê-se f de A em B), em que A é chamado de domínio, B de contradomínio e existe uma lei de formação representada por $f(x)$.

Domínio da função: são todos os valores de entrada possíveis (valores de x do gráfico) para a lei de formação.

Imagem da função: é formada pelo conjunto de todos os elementos correspondentes a algum elemento do domínio, (valores de y do gráfico).

Período de uma função: uma função é denominada periódica caso exista um número real $p > 0$, tal que: $f(x) = f(x + p)$. Com isso, o menor valor de p, que satisfaça essa igualdade, é chamado de período da função f.

Assim, na função seno, temos:

Domínio da função seno: \mathbb{R}

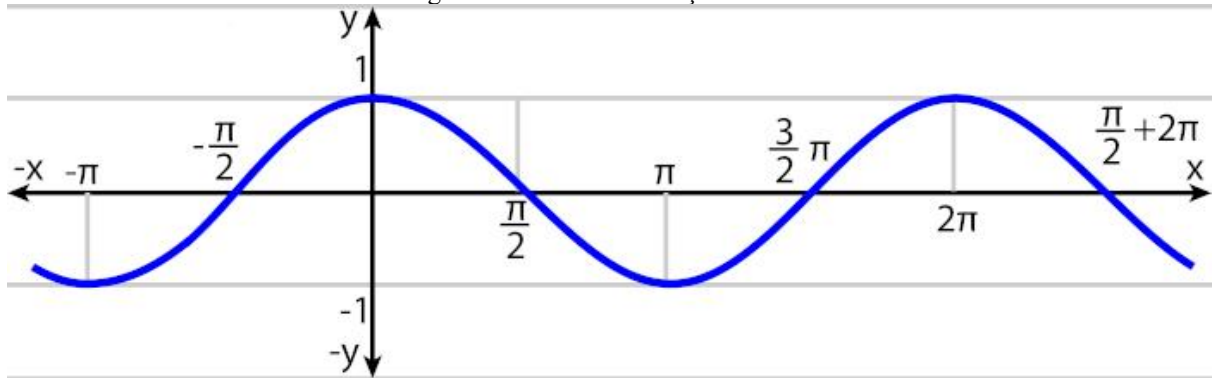
Imagem da função seno: $[-1,1]$

Função seno: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}(x)$, sendo x o ângulo em radianos.

Período da função seno: 2π

Em seguida, deixaremos que os alunos construam e identifiquem o domínio e a imagem das funções cosseno e tangente.

Figura 50 - Gráfico da função Cosseno



Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm>, 2024

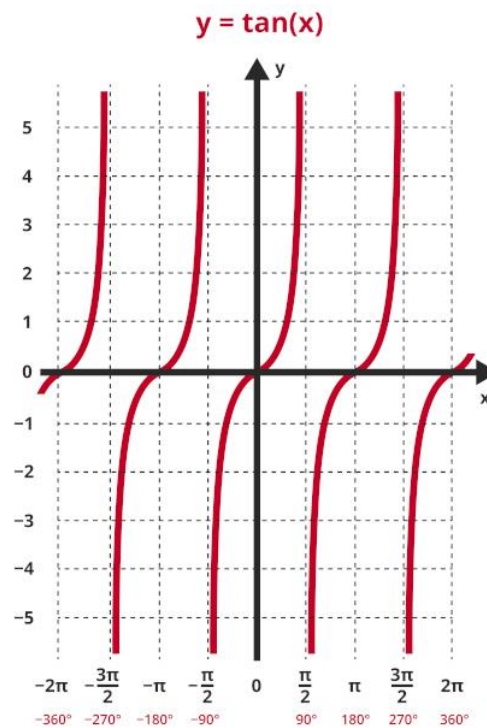
Domínio da função cosseno: \mathbb{R}

Imagem da função cosseno: $[-1, 1]$

Função cosseno: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$, sendo x o ângulo em radianos.

Período da função cosseno: 2π

Figura 51 - Gráfico da função Tangente



Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm>, 2024

Domínio da função tangente: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem da função tangente: \mathbb{R}

Período da função seno: π

Função tangente: $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = tg(x)$, sendo x o ângulo em radianos.

Ao corrigir a função tangente, mostraremos a animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/vykepyjm>

Depois de construírem e identificarem domínio e imagem de cada função, vamos abrir o GeoGebra para conversar sobre os parâmetros o que cada um pode alterar em cada uma das funções trigonométricas, disponível em <https://www.geogebra.org/m/z9gJwjss>

Os alunos deverão responder o que se pede sobre as funções $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \text{cos}(cx + d)$.

Exercício

1- O que acontece com o gráfico ao alterar o parâmetro a ?
R: o gráfico é deslocado horizontalmente.

2- O que acontece com o gráfico ao alterar o parâmetro b ?
R: a amplitude do gráfico, ou seja, o intervalo da imagem do gráfico pode aumentar ou diminuir.

3- O que acontece com o gráfico ao alterar o parâmetro c ?
R: altera-se o período da função.

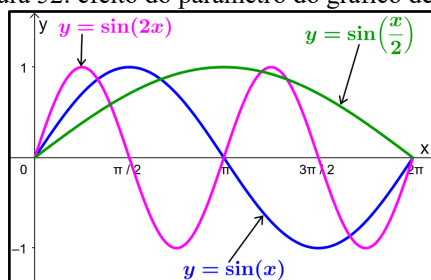
4- O que acontece com o gráfico ao alterar o parâmetro d ?
R: o gráfico é deslocado horizontalmente.

O período da função seno.

O período da função $f(x) = \text{sen}(x)$ é 2π , mas se x for multiplicado por uma constante, o período mudará.

Quando x é multiplicado por um número maior do que 1, a função sofre uma “aceleração”, ou seja, o período será menor, pois os valores de x aumentarão mais rapidamente. Já se a constante estiver entre 0 e 1, isso “desacelera” a função.

Figura 52: efeito do parâmetro do gráfico de seno



Fonte: Neurochispas, 2024

Por exemplo, na função $f(x) = \text{sen}(2x)$, temos a velocidade “dobrada” da função original, então o período é π . Já na função $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, a velocidade diminui pela metade, logo o período é 4π .

Determinar o período da função seno

Considerando o que discutimos anteriormente, a fórmula para encontrar o período de uma função $f(x) = a + b\text{sen}(cx + d)$ é dada por:

$$P = \frac{2\pi}{c}$$

Podemos fazer o mesmo processo para a função cosseno. Já a função tangente $f(x) = a + b \text{tg}(cx + d)$, como o período dela é π , a fórmula é diferente:

$$P = \frac{\pi}{c}$$

Exercícios

1) Qual é o período da função $y = \text{sen}(3x)$? R: $\frac{2\pi}{3}$

2) Dada a função $f(x) = 5 - 3 \text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, seu período é: R: 6

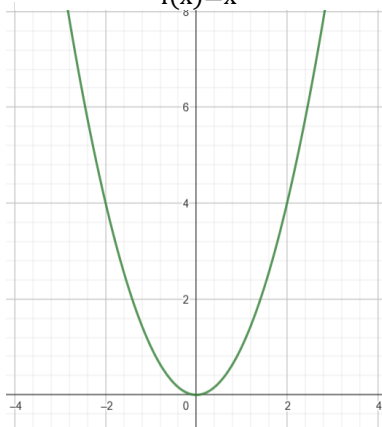
Função par e ímpar. (10 minutos)

Ao falarmos de funções também introduziremos o conceito de função par e ímpar. Sem descrever o que consiste, pediremos aos alunos o que eles entendem ou o acham que é uma função par e uma função ímpar.

Com as respostas postas, iremos desenhar exemplos na lousa de ambas as funções, para a função par utilizaremos $f(x) = x^2$ e para função ímpar $f(x) = x^3$

Figura 53 – Gráfico da função

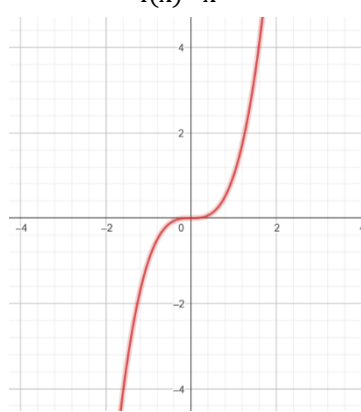
$$f(x) = x^2$$



Fonte: Autores, 2024

Figura 54 - Gráfico da função

$$f(x) = x^3$$



Fonte: Autores, 2024

Percebemos que para uma função ser par, então $f(x) = f(-x)$, e para uma função ser ímpar, precisamos que $f(-x) = -f(x)$.

Após essa discussão, iremos realizar algumas atividades com os alunos.

3) Seja uma função definida nos reais por $f(x) = \left[\frac{3}{(4+\cos x)} \right] + 1$. O menor e o maior valor de $f(x)$, respectivamente, são:

- a) 1, 6 e 2. d) 1, 4 e 1,6.
 b) 1, 4 e 3. e) 2 e 3.
 c) 1, 6 e 3.

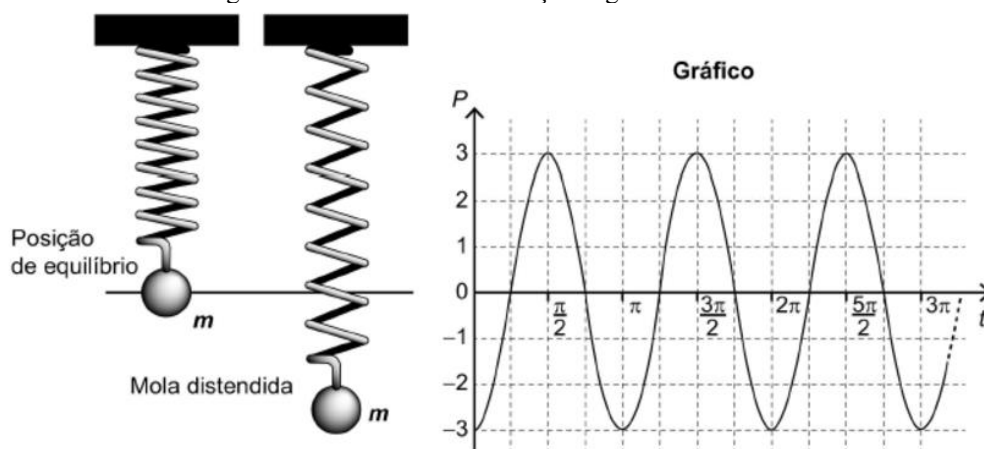
4) (FUVEST) O menor valor de $\frac{1}{(3-\cos x)}$, com x real, é:

- a) 1/6. d) 1.
 b) 1/4. e) 3.
 c) 1/2.

5) (ENEM 2021) Uma mola é solta da posição distendida conforme a figura. A figura à direita representa o gráfico da posição P (em cm) da massa m em função do tempo t (em segundo) em um sistema de coordenadas cartesianas. Esse movimento periódico é descrito por uma expressão do tipo $P(t) = \pm A \cos(\omega t)$ ou $P(t) = \pm A \sin(\omega t)$, em que $A > 0$ é a amplitude de deslocamento máximo e ω é a frequência, que se relaciona com o período T pela fórmula $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Considere a ausência de quaisquer forças dissipativas.

Figura 55 - Exercício sobre função trigonométrica Enem



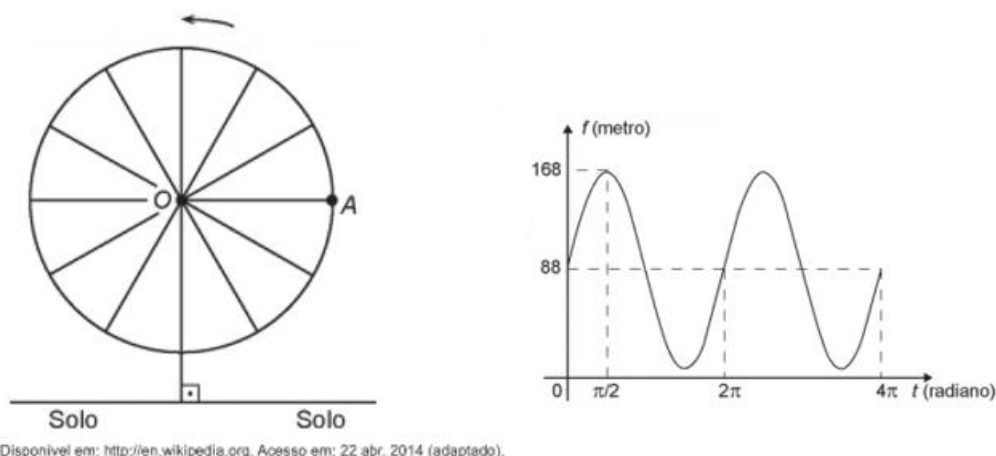
Fonte: Enem, 2021

A expressão algébrica que representa as posições $P(t)$ da massa m , ao longo do tempo, no gráfico, é

- a) $-3 \cos(2t)$ c) $3 \cos(2t)$ e) $6 \sin(2t)$
 b) $-3 \sin(2t)$ d) $-6 \cos(2t)$

6) (Enem 2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras: A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O . Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A , em relação ao solo, em função de t .

Figura 56 - Roda gigante e função trigonométrica



Disponível em: <http://en.wikipedia.org>. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

Fonte: <https://xequematenem.com.br/blog/questao-170-enem-2018/>. Acesso em: 20 nov. 2024.

Após duas voltas completas, obteve-se o gráfico à direita. A expressão da função altura é dada por:

- a) $f(t) = 80 \cdot \text{sen}(t) + 88$ d) $f(t) = 168 \cdot \text{sen}(t) + 88 \cos(t)$
 b) $f(t) = 80 \cdot \cos(t) + 88$ e) $f(t) = 88 \cdot \text{sen}(t) + 168 \cos(t)$
 c) $f(t) = 88 \cdot \cos(t) + 168$

7) Julgue as afirmativas a seguir:

- I → Ao calcular $\text{Tg } 140^\circ$, o valor será negativo.
 II → O ângulo de 200° é um ângulo do 2º quadrante.
 III → $\text{Sen } 130^\circ = \text{Seno } 50^\circ$.

Quais delas são corretas e quais são falsas?

8) É correto afirmar que:

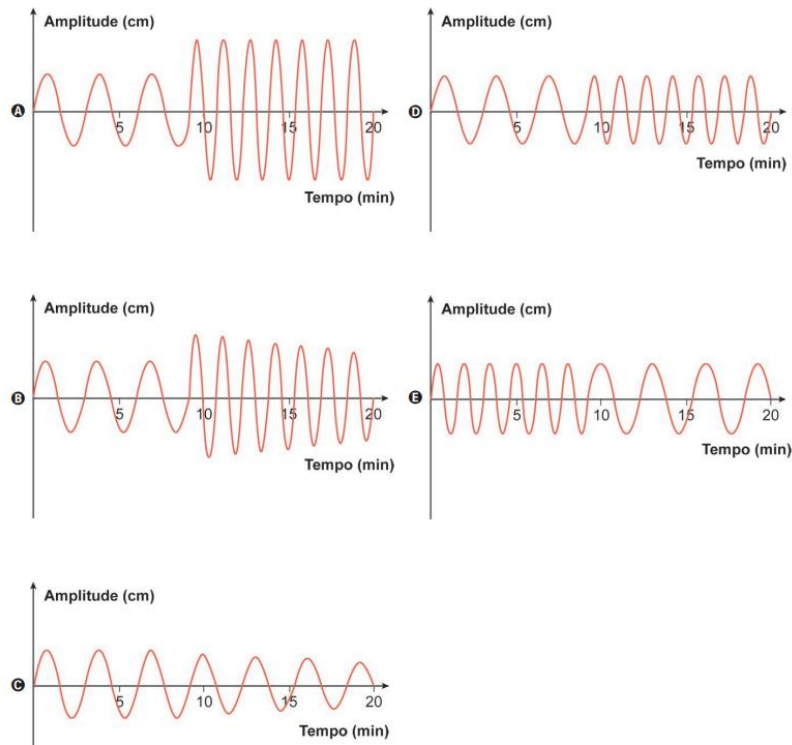
- 01) Sendo $x + y = \frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}(x) = \cos(y)$.
 02) O valor de $\text{sen}(1500^\circ)$ é negativo.
 04) O período da função $y = 1 + \text{sen}(2x)$ é π .
 08) A equação $\text{sen}(x) = m - 3$ possui solução para $m \in [2,4]$.

9) ENEM 2024 – Projetistas de uma fábrica de amortecedores realizaram uma série de experimentos que produziram oscilações semelhantes ao comportamento do gráfico de uma senoide, para qualquer tipo de estrada. Cada experimento teve duração de 20 minutos, sendo os 9 primeiros minutos em superfície que simula uma rodovia asfaltada, e os 11 minutos restantes em superfície que simula uma estrada de chão.

Para os amortecedores serem aprovados no experimento, exige-se que as amplitudes das ondas oscilatórias, em cada tipo de superfície, sejam constantes e, ainda, que a amplitude da oscilação do amortecedor no asfalto seja menor do que sua amplitude da oscilação na estrada de chão.

O tipo de gráfico que descreve o comportamento oscilatório de um amortecedor aprovado nesse experimento é

Figura 57 - Gráficos de funções trigonométricas



Fonte: Enem, 2024

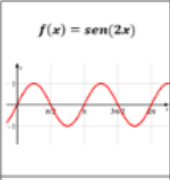


10) As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplesmente, pela função seno. Suponhamos que, para determinado porto, a variação da altura (h) da lâmina de água em função das horas (t) do dia seja dada pela função trigonométrica $h(t) = 10 + 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot t}{12}\right)$. Considerando essa equação, o período do dia em que um navio com 12 metros de casco pode permanecer no porto é de:

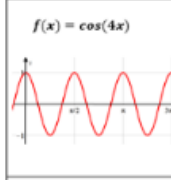
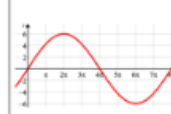
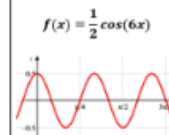
- a) Entre 3 e 11 horas.
- b) Entre 4 e 10 horas.
- c) Entre 2 e 10 horas.
- d) Entre 1 e 2 horas.
- e) Entre 10 e 11 horas.

Atividade Dorminhoco

Figura 58 - Jogo Dorminhoco

JOGO DORMINHOCO

$f(x) = \text{sen}(2x)$ 	$\text{Im} = [-1,1]$	Amplitude: 1
Período: π	$f(x) = 2\cos(x)$ 	$\text{Im} = [-2,2]$
Amplitude: 2	Período: 2π	$f(x) = 3\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ 
$\text{Im} = [-3,3]$	Amplitude: 3	Período: 4π

$f(x) = \cos(4x)$ 	$\text{Im} = [-1,1]$	Amplitude: 1
Período: $\frac{\pi}{2}$	$f(x) = 6\text{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$ 	$\text{Im} = [-6,6]$
Amplitude: 6	Período: 8π	$f(x) = \frac{1}{2}\cos(6x)$ 

Fonte: Parmegiani, 2023

Como jogar:

- 1) Os alunos farão grupos de cinco pessoas e cada grupo receberá os ANEXOS.
- 2) Inicialmente, os jogadores deverão embaralhar as cartas e, em seguida, analisá-las em conjunto e formar quartetos de cartas que combinem entre si. Uma carta sobrar.
- 3) Depois, as cartas serão embaralhadas novamente e distribuídas aos jogadores sendo que nenhum deles deverá mostrá-las aos colegas. O objetivo de cada jogador será obter 4 cartas que combinem entre si.
- 4) O jogador que receber 5 cartas iniciará o jogo. Ele tomará uma de suas cartas que não lhe serve e deslizará a mesma sobre a mesa para o colega da direita. O colega da direita tomará a carta, verificará se ela lhe serve ou não e fará o mesmo; assim prosseguirá o jogo.
- 5) A carta solitária deverá ficar uma rodada com cada jogador. Sendo assim, o jogador que a receber não poderá passá-la adiante de imediato, devendo permanecer com a mesma por, pelo menos, uma rodada.
- 6) Quando algum jogador conseguir um quarteto de cartas que combinem entre si, ele deverá largá-las vagarosamente sobre a mesa, de forma muito sutil e disfarçada, procurando esconder esta ação dos demais colegas.

7) Os jogadores, ao perceberem que um adversário colocou as cartas sobre a mesa, deverão fazer o mesmo, independentemente do fato de terem formado quartetos ou não. O último jogador a executar esta ação será o dorminhoco e perderá o jogo.

Referências:

GUZMAN, Jefferson Huera. **Período da Função Seno – Fórmulas e Exercícios**. Disponível em: <https://br.neurochispas.com/trigonometria/periodo-da-funcao-seno-formulas-e-exercicios>. Acesso em: 19 nov. 2024.

OLIVEIRA, Gabriel Alessandro de. **Funções periódicas**. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcoes-periodicas.htm>. Acesso em: 19 nov. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Funções periódicas**. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm>. Acesso em: 18 nov. 2024.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Funções trigonométricas**. Disponível em: <https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas.htm>. Acesso em: 19 nov. 2024.

PARMEGIANI, Roselice. **JOGO DORMINHOCO**. 2023. Disponível em: <https://www.ensinandomatematica.com/trigonometria-e-funcoes-trigonometricas-jogos-para-enriquecer-a-aprendizagem>. Acesso em: 18 nov. 2024.

XEQUEMATENEM. **Questão 170 – ENEM 2018**. Disponível em: <https://xequematenem.com.br/blog/questao-170-enem-2018/>. Acesso em: 20 nov. 2024.

Relatório da aula ministrada no dia 23 de novembro

Na manhã do dia 23/11, por conta dos feriados e de se tratar do fim de ano, imaginávamos que o número de alunos seria bem menor e de fato foi. Da nossa sala de aula habitual, redirecionamos eles até o laboratório de Informática, e às 08:00 estavam presentes 2 alunos, e por volta das 08:20 com 6 alunos iniciamos as atividades.

Com o auxílio da lousa, realizamos um desenho do círculo trigonométrico para retomar os assuntos de graus, radianos e relações trigonométricas, seno, cosseno e tangente. Os alunos aparentavam estarem meio receosos para responder as perguntas dos professores, de modo que ainda não era possível averiguar se haviam realmente compreendido o conceito, ou se apenas estavam receosos de responder. Para verificar se, de fato, eles compreenderam, fizemos mais exercícios no quadro com participação deles, em vez de deixá-los fazer sozinhos, como havíamos planejado.

A primeira atividade consistia em realizar uma tabela para associar os valores de seno, cosseno e tangente aos ângulos já estipulados. Preenchemos com eles os valores para 0° , para que entendessem a proposta da atividade. O professor supervisor fez alguns apontamentos enfatizando as explicações que tínhamos feito na última aula, de que os valores obtidos para o seno, cosseno e tangente são relações entre os segmentos de retas. Assim, percebemos que os alunos compreenderam melhor como são obtidos aqueles valores. Em seguida pedimos para que os alunos preenchessem o restante da tabela e todos concluíram com sucesso. Durante a correção da tabela com os estudantes, uma aluna foi bem participativa e nos auxiliou a montá-la completamente.

Na sequência, fizemos a atividade de construção do gráfico da função seno, de acordo com os dados da tabela construída anteriormente. Alguns alunos conseguiram fazer a construção do gráfico antes mesmo que pedíssemos para que eles a fizessem. Porém, uma aluna não corrigiu o sinal do seno de $\frac{3\pi}{2} rad$, que tinha sido escrito como sendo 1 e não -1 , de maneira que o gráfico dela tinha ficado com imagem só nos números reais positivos, e então intervimos para ajudá-la a corrigir.

Para assistir os alunos que não tinham entendido como construir o gráfico, relembramos como realizar a localização de pontos no plano cartesiano e desenhando-os no quadro. Após, discutimos sobre o domínio e imagem de uma função, declarando que o domínio são todos os valores de x para os quais conseguimos colocar “dentro” da função, ou seja, são os valores de x que podemos substituir em $f(x) = sen(x)$ e encontrar um valor no conjunto dos números

reais. Já a imagem é o conjunto dos resultados obtidos ao se calcular a função seno de todos os elementos do domínio.

Usando o círculo trigonométrico, explicamos que o gráfico é contínuo porque o domínio é sempre os números reais, visto que qualquer número dado, é sempre possível encontrar um seno e cosseno no círculo trigonométrico. Para aproveitar melhor o tempo restante que tínhamos no laboratório, construímos com eles apenas a função seno apresentado na apostila impressa e disponibilizada, para que conseguíssemos abordar o planejado com o GeoGebra ainda na primeira metade de aula.

A atividade do GeoGebra consistia em abrir uma atividade pronta com controles deslizantes que viabilizam observar quais mudanças acontecem no gráfico quando se alteram os parâmetros da função seno. Os alunos responderam somente observando o gráfico e participaram quando da discussão com o grupo todo. Ao chegar o horário do intervalo, finalizamos as atividades no laboratório e pedimos aos alunos para arrumarem seus materiais uma vez que voltaríamos para a sala de aula.

Na segunda metade da aula iniciamos as atividades solicitando para que os alunos fizessem os gráficos do cosseno e tangente na apostila impressa, e descrevessem o domínio, imagem e período das funções. Para o cosseno, visto sua semelhança ao do seno, os alunos não tiveram dificuldade em responder quando corrigimos no quadro. Todavia, para a tangente, verificamos que os alunos não entenderam qual seria um esboço do gráfico, então tivemos que acompanhá-los na resolução deste exercício nas mesas.

Para ajudá-los, esclarecemos novamente como se realiza tal esboço utilizando o círculo trigonométrico, pois nele quanto mais próximo de 90° , maior o valor da tangente, já que maior será o segmento formado no eixo das tangentes. Também relembramos sobre o exemplo do laser na primeira aula de relações trigonométricas, em que quanto mais próximo de 90° , maior foi a distância percorrida pelo laser.

O uso do software GeoGebra auxiliou na compreensão da descontinuidade da função tangente quando $tg(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$. De maneira expositiva explicamos como obter o período das funções seno, cosseno e tangente. Nessa parte da aula, os alunos compreenderam os conceitos, já que quando perguntamos individualmente, eles conseguiram responder, mas não foram tão participativos. Nos exercícios, passávamos de mesa em mesa para auxiliá-los.

Resolvemos os 2 exercícios propostos na lista e em seguida começamos a resolver o exercício do ENEM, pois queríamos que os alunos tivessem tempo de jogar o jogo

“dorminhoco” que preparamos, mas que tivessem pelo menos 1 exercício de vestibular resolvido.

Assim, faltando 35 minutos, encerramos as explicações e iniciamos o jogo, que consistia em juntar 4 cartas que descreviam uma função trigonométrica. Uma carta descrevia a lei de formação, outra a imagem, a terceira o período e a quarta a amplitude do gráfico da função. No início os alunos não entenderam muito bem o objetivo do jogo, o qual consiste em abaixar as cartas discretamente depois que o primeiro jogador abaixou. Uma aluna conseguiu formar o grupo necessário na primeira rodada e logo abaixou, mas levou cerca de 4 rodadas a mais para que os outros jogadores percebessem.

Depois desta primeira partida, todos eles foram bem. Após a terceira partida, acrescentamos mais um baralho para que nós jogássemos com eles também. A aula acabou após um dos alunos ganharem quinta rodada.

2.10 AULA 10 – Gincana (30/11)

Nesta aula, todos os grupos do Promat irão se reunir para fazer uma gincana final com os estudantes. Todos os alunos de todas as turmas presentes no dia formarão grupos, os quais competirão uns com os outros. Os estagiários ficarão responsáveis por elaborar dez estandes diferentes. Os grupos terão 15 minutos em cada estande para participar da gincana proposta e acumular pontos. Ao final, ganhará o grupo que somar mais pontos.

Diante disso, esse plano de aula possui autoria não só do nosso grupo, mas também de todos os outros estagiários. Segue abaixo uma listagem com todas as gincanas planejadas em cada estande.

Maíri e Michelli – Quebra-cabeça

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio

Tempo de execução: 4 horas aula

Conteúdo: Trigonometria

Objetivo Geral: Desenvolver o raciocínio lógico.

Objetivos Específicos: Ao se trabalhar com a montagem de quebra-cabeças contendo imagem gerada pela IA a partir da sequência de Fibonacci, objetiva-se que o aluno seja capaz de desenvolver o raciocínio lógico através das questões de cada envelope.

Recursos Didáticos: quebra-cabeça, envelope de folha sulfite, caneta, papel de rascunho e atividades impressas.

Encaminhamento metodológico (20 minutos):

A gincana com os quebra-cabeças consiste em resolver o problema de raciocínio lógico de cada envelope para obter as peças dos quebra-cabeça. Vale ressaltar que o grupo só pegará o próximo envelope se ele conseguir montar todas as peças que já possui. O quebra-cabeça montado inteiro vale 10 pontos (0,25 vezes cada peça montada), caso haja empate, o desempate é realizado por meio da maior quantidade de peças montadas no menor número de tempo.

Figura 59 - Quebra-cabeça



Fonte: Maíri e Michelli, 2024

Problemas de lógica:

1. Como dividir uma pizza em 8 pedaços realizando apenas três cortes?

R: Basta cortar a pizza em 4 partes com dois cortes perpendiculares e um corte circular, como se fosse pôr recheio na pizza, tem-se assim 8 pedaços.

2. Existem quantas maneiras de se ter vinte e cinco reais apenas com cédulas de um, cinco e dez reais?

Resposta: 12

3. Um estudante terminou um trabalho que tinha n páginas. Para numerar todas essas páginas iniciando com a página 1, ele escreveu 270 algarismos. Então o valor de n é?

Resposta: 126

4. O pai do Padre é o único filho do meu pai. O que o Padre é meu?

Resposta: filho.

5. A escada de um prédio tem 25 degraus. Se Maria subiu 5 degraus, desceu 9 e ao subir mais 6 viu que só faltavam 3 degraus para chegar ao último degrau da escada, em que degrau ela estava quando começou a contar?

Resposta: 20

6. Sabe-se que:

Rita tem 6 (seis) anos a mais que Ana e 13 (treze) anos a mais que Bia;

Paula tem 6 (seis) anos a mais que Bia.

Então, com relação as 4 (quatro) pessoas citadas, é correto dizer que:

- a) Rita não é a mais velha;
- b) Ana é a mais nova;
- c) Paula é mais nova que Ana;
- d) Paula e Ana tem a mesma idade;
- e) Rita e Paula tem a mesma idade.

Resposta: Paula é mais nova que Ana.

Referências

ASTH, Rafael C.. **Desafios matemáticos para estimular seu raciocínio**. Publicado em Toda matéria. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/desafios-matematicos/>. Acesso em: 18 out. 2024.

Calcule mais. 2004. Disponível em: https://calculemais.com.br/exercicios-de-matematica/835/raciocinio_logico-exercicio-exercicio_19. Acesso em: 16 nov. 2024.

CLUBES de Matemática da OBMEP: Probleminha corte a pizza. Probleminha corte a pizza. Disponível em: <https://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-corte-a-pizza/>. Acesso em: 18 out. 2024.

DESAFIO de lógica 215. Disponível em: <https://www.concursos.com.br/desafios/desafio-logica-215.html/>. Acesso em: 18 out. 2024.

FUVEST. Publicado em: Passei direto. Disponível em: <https://www.passeidireto.com/pergunta/146532468/14-fuvest-um-estudante-terminou-um-trabalho-que-tinha-n-paginas-para-numerar-tod>. Acesso em: 18 out. 2024.

MATEMÁTICA. 2001. Prova objetiva PUC Rio. Disponível em: <https://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/2001-2/matoo.html>. Acesso em: 18 out. 2024.

Shimmer e Ruan – SET!

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio

Tempo de execução: 20 minutos

Objetivo Geral: Desenvolver o reconhecimento de padrões.

Recursos Didáticos: Jogo SET!

Encaminhamento metodológico (20 minutos):

O jogo SET! é um jogo competitivo em tempo real em que cada jogador buscar formar conjuntos de cartas entre as do tabuleiro e decorre da seguinte forma:

1. Cada carta do jogo possui quatro características -- forma presente, cor, preenchimento e quantidade de formas;
2. Um SET é um conjunto de três cartas, em que cartas entre as cartas, cada uma das características devem ser todas diferentes;
3. Um jogador embaralha todas as cartas e, então, posiciona 12 cartas no tabuleiro;
4. Os jogadores irão competir contra os professores Shimmer e Ruan, buscando encontrar SETs dentre as cartas presentes;
5. Quando um jogador encontra um SET, ele anuncia para o grupo, mostra as cartas encontradas e, se for realmente um SET, ele as toma para si. Em seguida, as três cartas são repostas e o jogo continua;

O jogo vai ocorrer por 20 minutos. Ao final desse tempo, os jogadores contarão a quantidade de SETs formados. Cada SET contará por cinco pontos.

O grupo vencendo será aquele que tiver mais SETs.

Alisson e Vitor – RPG (Plano Cartesiano)

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio

Tempo de execução: 20 minutos

Encaminhamento metodológico (25 minutos):

Para adaptar o RPG para uma atividade rápida e pontuável, removeremos o aspecto narrativo e utilização de personagens. Utilizaremos os mapas com desafios relacionados com Geometria Analítica. Serão utilizados os 16 mapas disponíveis, formando 4 planos cartesianos com 4 quadrantes cada. Cada plano cartesiano será composto por 4 desafios, distância entre pontos, ponto médio de segmento e equações e intersecções de retas, em que cada um destes são elementos gráficos do mapa.

A pontuação será dada ao resolverem os desafios e completarem os mapas, são 0,5 pontos por desafio e 0,5 pontos ao fecharem um mapa, totalizando 2,5 pontos por mapa e 10 pontos totais. Abaixo seguem os mapas e os desafios pertinentes a cada um.

Figura 60 - Desafio RPG I



Fonte: Alisson e Vitor, 2024

Desafios:

- 1- *“Centralizado entre o cacto mais ao leste e o poste mais ao sul, encontra-se o próximo desafio”.*

Esse enigma faz referência ao cacto localizado no ponto (9,3) e o poste no ponto (-4,-8), e quando se diz centralizado entre esses pontos está pedindo para calcular o ponto médio entre eles. No caso (2.5, -2.5).

- 2- *“Duas retas, uma formada pela estátua destruída e o poste ao norte do templo alagado, e a outra formada pela lanterna e o peixe que nada para o sul. O ponto de encontro dessas linhas indica o próximo desafio.”*

Essa dica faz referência à estátua danificada (-7, 6), ao poste (-7, -1) no templo, ao peixe (-1, -3) e a lanterna (-3, -1). O enigma solicita que os alunos calculem o ponto de intersecção das retas formadas pela estátua e o poste ($x = -7$) e a reta formada pelo peixe e a lanterna ($-x - y = 4$), o ponto de intersecção é a estátua inteira na igreja (-7, 3).

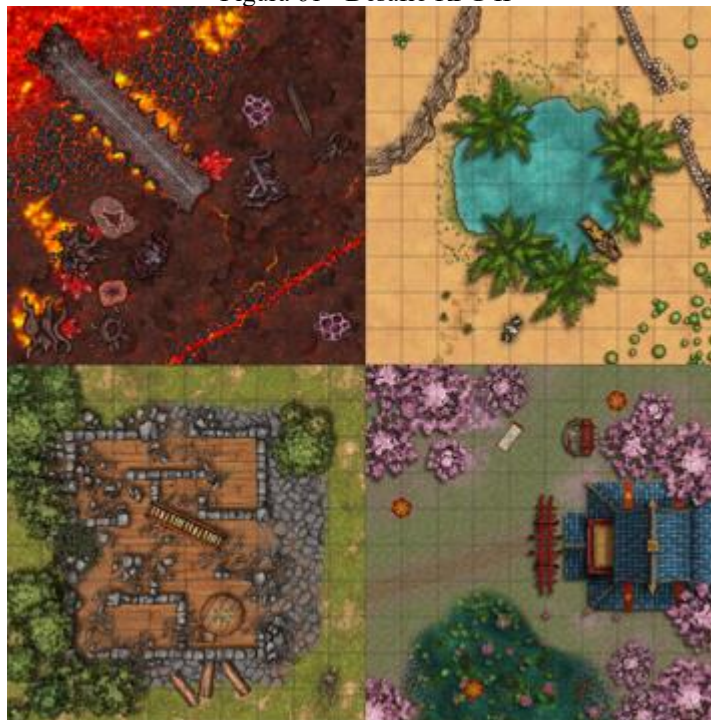
- 3- *“Para encontrar o próximo desafio, é necessário descobrir a distância entre o escaravelho e a fogueira”*

Escaravelho (5, 8), a fogueira (8, -8), e a distância é 16,28 unidades.

- 4- *“Qual a equação da reta que passa pela raiz morta e a grande pirâmide?”*

Esse desafio trata da equação da reta formada pela árvore seca (3, -3) e o topo da pirâmide (7, 7), que é ($-5x + 2y = -21$).

Figura 61 - Desafio RPG II



Fonte: Alisson e Vitor, 2024

Desafios:

- 1- *“Para avançar para o próximo desafio, responda: qual é a fórmula que descreve com precisão a linha que passa por essa muralha?”*

O desafio envolve calcular a equação da reta que passa pela muralha do deserto ($2x + y = 24$).

- 2- *“Na antiga ruína, uma velha mesa repousa, enquanto no santuário, um altar venerado ergue-se em silêncio. Qual a distância entre os dois?”*

Esse enigma solicita que seja calculada a distância entre a mesa da ruína (-4, -7) e o altar no templo (6, -2), que é 11,18 unidades.

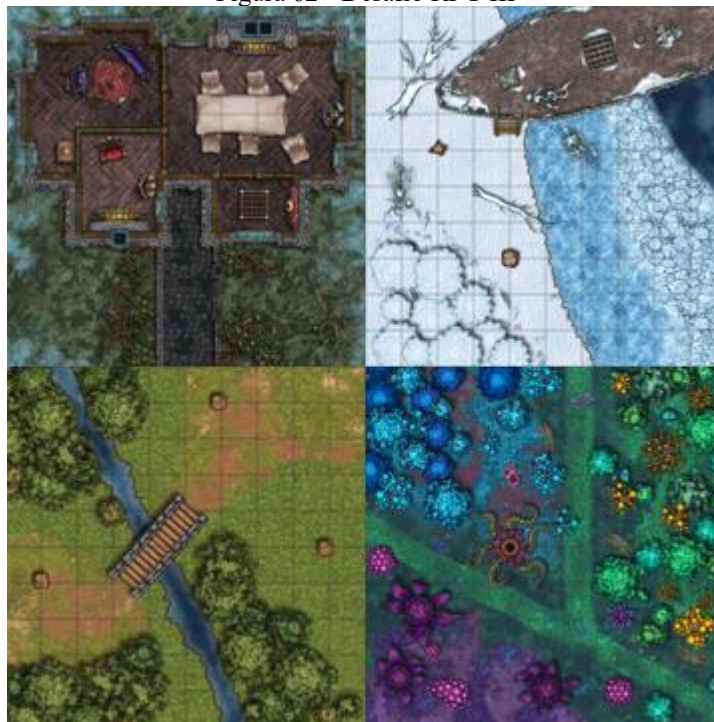
- 3- *“Em meio fogo um rio de lava corre fervente, enquanto um caminho perdido se esconde entre as areias quentes. A interseção entre essas duas retas revela indica o próximo desafio”*.

Esse desafio se refere ao rio de lava no inferno ($2x - 3y = -11$) e o caminho escondido no deserto ($9x - 4y = 18$) e pede sua intersecção (5.16, 7.11).

- 4- *“No deserto, jaz o crânio de uma besta desconhecida, e no templo, o pergaminho dos segredos esquecidos. O próximo desafio se encontra no ponto médio dos dois”*.

Essa dica solicita o ponto médio entre o crânio (4, 1) e o pergaminho (4, -2), no caso (4, -0.5).

Figura 62 - Desafio RPG III



Fonte: Alisson e Vitor, 2024

Desafios:

- 1- *“Em meio a floresta existe um rio que corre de forma linear, descubra a fórmula que guia o seu caminho para o encontrar o próximo desafio”.*

Esse enigma solicita que os alunos calculem a equação do rio ($2x + y = -17$).

- 2- *“Entre o medo e o gelo, uma distância deve ser encontrada, um antigo e abandonado poço e a entrada para um porão gelado”.*

Para esse enigma é necessário calcular a distância entre o poço (-1, 1) e a porta do porão do navio (4, 8), que é 8,6.

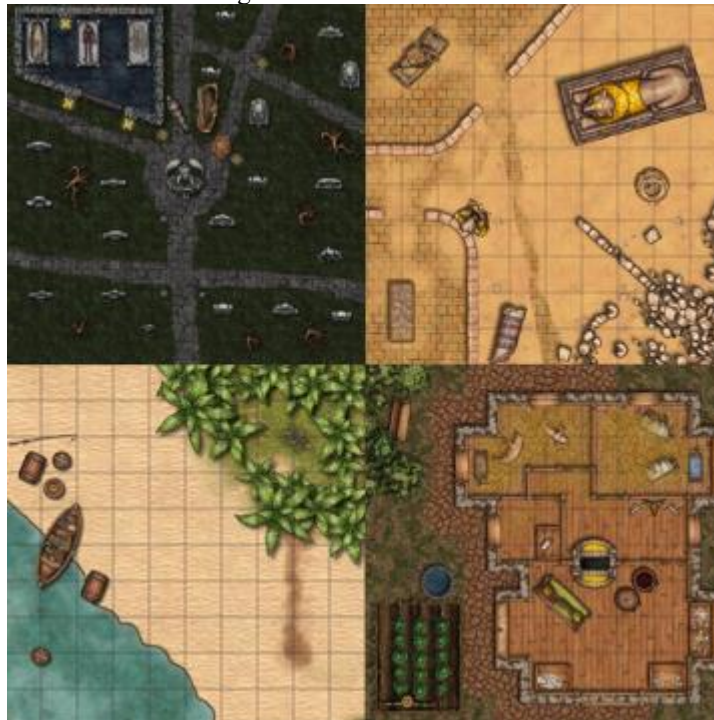
- 3- *“Para encontrar o próximo desafio, ache a intersecção de duas retas, uma formada pela poltrona rasgada na mansão e pela bússola no navio e a outra que passa pela ponte”.*

Esse desafio requer que o aluno encontre o ponto de intersecção entre a reta da ponte ($-x + y = 1$), e a reta formada pela poltrona rasgada e bússola ($y = 8$), que nos deixa com o ponto (7, 8).

- 4- *“Na floresta encantada, entre a bela flor ao sul e a planta carnívora, o próximo desafio se encontra”.*

Nesse desafio, é preciso encontrar o ponto médio entre a flor mais ao sul da floresta (5, -9) e a planta carnívora (4, -5), que é (4.5, -7).

Figura 63 - Desafio RPG IV



Fonte: Alisson e Vitor, 2024

Desafios:

- 1- *“Para avançar é preciso encontrar a intersecção de duas retas. Uma delas passa pelo sofá antigo da fazenda, um local de descanso e lembranças. A outra está no cemitério, entre os túmulos esquecidos, passando por um túmulo ao lado oeste do anjo guardião e o outro logo ao sul do primeiro, depois do caminho de pedra”.*

Esse desafio solicita que os jogadores encontrem o ponto de intersecção das retas formadas pelo sofá na fazenda ($x + y = 1$), e a reta formada pelos túmulos $(-7, 5)$ e $(-7, 2)$, a reta ($x = -7$), o ponto de intersecção é $(-7, 8)$.

- 2- *“O próximo desafio se encontra no ponto médio de dois elementos. A cabeça de um cervo, que guarda memórias antigas, e um poço, onde a água guarda a promessa de sobrevivência”.*

Esse desafio pede o ponto médio entre o cervo $(9, -3)$ e o poço $(3, -5)$, e o ponto médio é $(6, -4)$.

- 3- *“Nas planícies cartesianas esquecidas, a estátua de um anjo observa silenciosamente o horizonte, enquanto um velho barril de madeira flutua, cheio de segredos do passado. Qual a distância entre os dois?”*

Nesse desafio os jogadores precisam descobrir a distância entre o anjo $(-5, 5)$ e o barril $(-9, -8)$, que é 13,6.

- 4- *“De um lado, morto entre as palmeiras. Do outro, a estátua de Anúbis, o guardião das almas. Para prosseguir, vocês devem traçar o caminho que une esqueleto e a estátua de Anúbis”.*

Esse desafio solicita que os jogadores encontrem a equação de reta que passa pelo esqueleto $(-2, -2)$ e a estátua de Anúbis $(3, 4)$, que é $(-6x + 5y = 2)$.

Cassiano e Anderson – Caça ao Tesouro

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio

Tempo de execução: 20 minutos

Objetivo Geral: Reconhecer e resolver conceitos do Círculo Trigonométrico.

Recursos Didáticos: Envelopes, pistas e desafios.

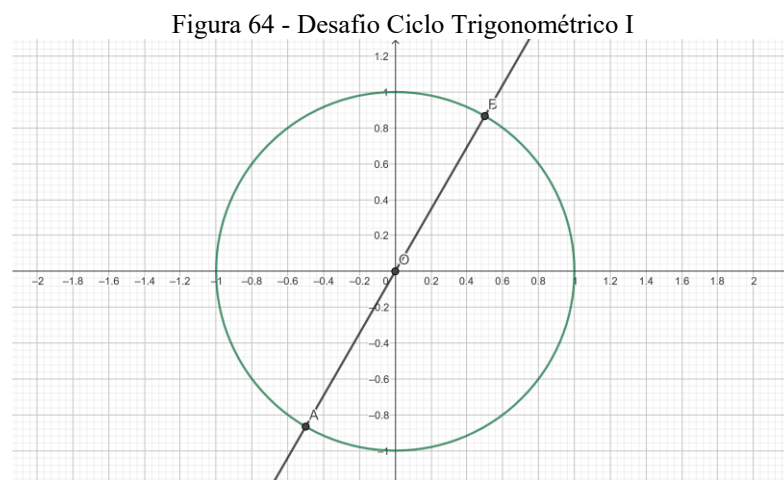
Encaminhamento metodológico (20 minutos):

Para realizar o jogo Caça ao Tesouro, serão necessárias 3 estações, nas quais teremos desafios que incluem medidas de arco e ângulos no ciclo trigonométrico. Cada grupo terá um percurso de estações definidas antecipadamente.

Será entregue a primeira pista, em que o grupo encontrará o 1º desafio, e, contemplado a resposta, o grupo recebe a 2ª pista para o próximo Desafio. Os desafios e pistas são distribuídos dessa maneira até o último desafio.

Desafio 1: “Um relógio analógico marca 5 horas. Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos?” Resposta: 150°

Desafio 2: Construa o ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos ângulos $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$. Qual a figura geométrica se formou? Resposta: Como dois ângulos coincidem no ponto A e os outros dois também coincidem no ponto B, formam um segmento de reta. A representação desses pontos está presente na Figura abaixo.

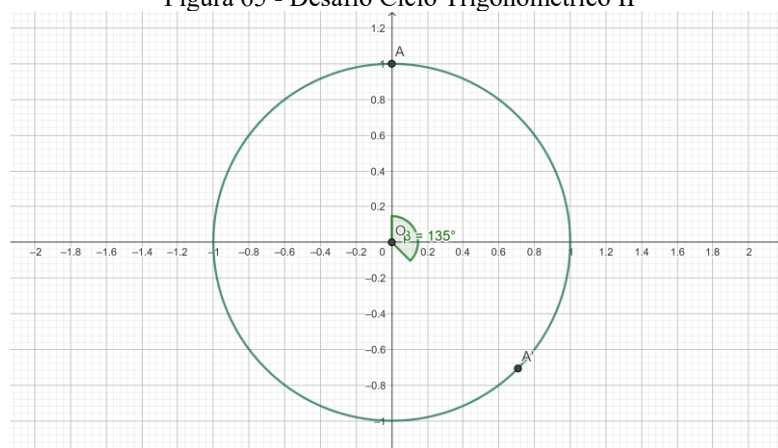


Fonte: Cassiano e Anderson, 2024

Desafio 3: Uma roda gigante possui raio de 20 metros. Se um passageiro está no ponto mais alto da roda gigante e gira um ângulo de 135° no sentido horário, qual será sua nova altura do solo? Resposta: ao girar um ângulo de 135° , o passageiro está a 45° do eixo horizontal e vertical da roda gigante, no 4º quadrante. Para determinar a altura, será:

$$Altura = r - r\text{Sen}(45^\circ) = 20 - 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 - 10\sqrt{2} \cong 20 - 14,14 \cong 5,86 \text{ metros}$$

Figura 65 - Desafio Ciclo Trigonométrico II



Fonte: Cassiano e Anderson, 2024

Pista 1: Sempre podemos encontrar conhecimento, mas existe um lugar que é especial, que você encontra conhecimento em páginas. O próximo desafio está em frente deste lugar, nas flores que perfumam o lugar.

A pista leva em frente a Biblioteca.

Pista 2: Homenagem ao governador Mario Pereira, existe um monumento na Unioeste. O Próximo desafio está aos arredores do monumento.

A pista leva ao Monumento Mario Pereira.

Pista 3: Para subir ou descer, é necessário girar como se fosse um ciclo trigonométrico. O próximo desafio encontra-se na base deste ciclo.

A pista leva para o R.U.

Marca o máximo de pontos o grupo que resolver o último desafio em até 20 minutos.

Fabrizio e Milleni: Adivinhando Volume, Peso e Comprimento

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio e de graduação.

Tempo de execução: 20 a 30 minutos.

Conteúdo: Volume e medidas de figuras espaciais

Objetivo Geral: Estimar grandezas utilizando medições indiretas

Objetivos Específicos:

- Trabalhar a noção de escalas;
- Estimar valores com base em comparações.

Recursos didáticos: Recipientes de diferentes formatos e tamanhos (como copos, garrafas, jarros); líquidos para encher os recipientes; objetos de diferentes pesos (livros, bolas,

brinquedos etc.); objetos de diferentes comprimentos (lápiz, cordas, cabos etc.), instrumentos de medida como balança e régua.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente, vamos encher os recipientes com quantidades variadas de líquido, e realizar a medição do peso e comprimento dos objetos selecionados. Cada grupo deverá estimar o volume, peso e comprimento dos objetos indicados. Serão 4 objetos para estimar o volume, 3 objetos para estimar o peso e 3 objetos para estimar o comprimento.

Os objetos escolhidos para a unidade de medida peso foram uma caixa com bolinhas de gude (1,100 kg), um notebook (1,730 kg), um kindle (255g) e uma garrafa com um pouco de água (75g). Para a unidade de medida comprimento, foram escolhidos uma caixa (20,5cm), um canudo de formatura (31cm) e um pedaço de barbante (1,65m). Por fim, para o volume, foram escolhidos uma tampinha (10ml), um cilindro obliquo (1400ml) e um poliedro (750ml). A pontuação de cada grupo será atribuída de acordo com as medidas informadas mais próximas das corretas.

Felipe K. e Felipe S. – Jogo de raciocínio lógico envolvendo feijões

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio e de graduação.

Tempo de execução: 20 a 30 minutos.

Conteúdo: Somas de números inteiros; raciocínio lógico.

Objetivo Geral: Exercitar o raciocínio lógico e organização de pensamentos dos alunos.

Objetivos Específicos:

- Jogar um jogo que envolve raciocínio lógico;
- Interagir com outros estudantes em discussões e trocas de ideias;
- Trabalhar em grupo para elaborar uma estratégia para vencer os jogos.

Recursos Didáticos: feijões, papel e lápis para as contas.

Encaminhamento metodológico: Será trabalhado um jogo de raciocínio lógico com os estudantes, o qual tem as seguintes regras:

- 1) Jogam dois jogadores, um contra o outro. Há 8 feijões em uma mesa e cada jogador possui 5 feijões em sua mão.
- 2) O jogo é jogado em turnos. Na sua vez, o jogador é obrigado a fazer uma única ação.

As ações são:

- Pegar 1, 3 ou 4 feijões da mesa e colocá-los em sua mão;
- Colocar 1, 3 ou 4 feijões da sua mão na mesa.

3) Ganha o jogador que coletar o último feijão da mesa.

Todos os alunos jogarão em conjunto contra os professores. Este jogo é planejado de tal modo que o primeiro jogador a jogar, se jogar corretamente, sempre ganhará. Não daremos essa informação de início aos alunos, mas deixaremos com que o primeiro turno seja sempre deles.

A fim de vencer o desafio, a estratégia a ser adotada pelos estudantes deve ser a de pegar ou depositar feijões na mesa de modo que, ao fim do seu turno, haja 2, 7, 9, 14 ou 16 feijões sobre a mesa.

Serão jogadas cinco partidas com os estudantes. A primeira valerá 5 pontos. A segunda 10, a terceira 10, a quarta 25 e a quinta 30 pontos. O intuito do valor baixo nas primeiras tentativas é o de fazer com que os estudantes as utilizem para testar o jogo e criar uma estratégia.

Ao final das 5 partidas, falaremos que o primeiro a jogar sempre irá ganhar e será solicitado aos estudantes que expliquem a estratégia necessária para vencer o jogo e os professores irão avaliar a explicação, recompensando-a com pontos.

Se os estudantes elaborarem uma resposta que atinja o nível “precisamos deixar 2 feijões na mesa”, serão dados 15 pontos a eles. Se o nível da explicação atingir “precisamos sempre deixar 2, 7, 9, 14 ou 16 feijões na mesa ao fim do nosso turno”, então os estudantes ganharão mais 10 pontos (totalizando 25). Por fim, se a explicação ficar bem elaborada a nível de “ao fim do nosso turno, precisamos sempre fazer com que o número de feijões sobre a mesa seja um múltiplo de 7 ou um múltiplo de 7 mais duas unidades”, eles ganharão mais 5 pontos (totalizando 30) nessa atividade final.

Somando a quantidade máxima de pontos a serem feitos pelos estudantes, obtemos 110 pontos. Entretanto, caso a pontuação exceda 100 pontos, esses pontos extras serão desconsiderados e os alunos receberão a nota máxima de 100 pontos na gincana.

Eduardo e Milena - Atividade Pega-Varetas

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio e de graduação.

Tempo de execução: 20 a 30 minutos

Conteúdo: Sistemas lineares de duas incógnitas.

Objetivo Geral: (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados a diferentes contextos e/ou seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Objetivos Específicos:

- Reconhecer e escrever em linguagem algébrica sistemas de equação do 1.º grau.

- Resolver sistemas de equação do 1.º grau, utilizando, ou não, softwares.

Recursos Didáticos: jogo pega-varetas, papel, lápis e borracha.

Encaminhamento metodológico (25 minutos):

Vamos pedir para que os alunos se dividam em dois grupos A e B.

Para este jogo de pega-varetas, vamos reduzir as varetas apenas às cores azul (3 pontos) e amarela (5 pontos).

Cada grupo se dividirá novamente em dois grupos menores (A_1, A_2, B_1 e B_2) para jogar uma partida de pega varetas (A_1 contra A_2 e B_1 contra B_2). De acordo com o número de varetas pegadas por cada grupo (A e B), formarão um sistema linear de duas incógnitas para que o outro grupo resolva (A ou B). Para cada sistema linear elaborado e resolvido corretamente, os alunos somarão 10 pontos.

Os alunos poderão jogar, elaborar e resolver tantos sistemas quanto possíveis no tempo de 25 minutos, para somar a maior quantidade de pontos possível.

Os professores estarão responsáveis por acompanhar a execução e verificar se os sistemas foram elaborados e resolvidos corretamente.

Luiza – Jogo das borboletas (20 minutos)

Assim que os alunos chegarem, será entregue 3 cartas ao grupo e 3 para o professor e as regras serão explicadas:

Os jogadores poderão colocar uma carta em uma linha conectando uma das borboletas centrais com outra borboleta, após colocar a carta, se ela tiver uma seta vermelha será realizada a subtração e se a seta for azul, será realizada a soma do valor da carta nos botões das borboletas ligadas pela linha. Na primeira carta, os alunos podem determinar a quantidade de botões em cada borboleta, respeitando o valor e a operação da carta colocada. Em seguida, será a vez do professor, que colocará uma carta e botões correspondentes a operação e valor da carta. E assim sucessivamente, a cada triângulo formado com as cartas, o jogador responsável pela carta que fechou o triângulo ganha 1 ponto, se formarem um losango, ganha 2 pontos. Totalizando no máximo 10 pontos.

Relatório da gincana do dia 30 de novembro

Neste dia, as atividades não foram realizadas em sala, mas no espaço que se destina à cantina da universidade, por conta do espaço maior e da proposta de gincana, em que os alunos de todas as turmas se dividiriam em 10 grupos para a sua realização, que consistiu em 10 atividades diferentes para que os alunos participassem de cada uma delas. Os alunos começaram a chegar às 7:45, mas até às 8:00 menos de 20 alunos haviam chegado. Por isso, aguardamos

cerca de 20 minutos para começar para esperar outros alunos. Ao todo foram 42 alunos presentes.

Na atividade de pega-varetas, os alunos chegaram e explicávamos como funcionaria, conforme o plano de aula. Os alunos, em sua maioria, não demonstraram dificuldade em entender a proposta, exceto uma dupla que, quando falamos que a atividade era para elaborar um sistema linear, eles não souberam dizer o que era. Escrevemos um exemplo no papel e perguntamos se eles se recordavam, então disseram que desta forma sim.

Os primeiros valores que demos para que descobrissem eram 2 para as varetas amarelas e 3 para as azuis no grupo A; 4 para as amarelas e 7 para as azuis no grupo B. Cada grupo (A e B) se subdividia novamente, normalmente uma dupla formava o grupo A e assim um jogava contra o outro e a pontuação de cada um deles formava uma equação linear. Alguns grupos se subdividiam primeiramente em um trio e uma dupla, ou dois trios, mas quando isso acontecia, dois do trio jogavam e o outro fazia as anotações.

Primeiramente eles tiveram dificuldade de relacionar as cores com as incógnitas. Por exemplo, tentavam escrever $2x + 3y = 17$, colocando x e y como os valores das pontuações das varetas, e não do número de varetas pegas. O objetivo era o contrário, deixar como incógnitas os valores das pontuações das varetas e não o número de varetas pegas.

Outra dificuldade foi a de relacionar a mesma informação com a mesma incógnita. Por exemplo, chamavam de x o valor da peça amarela em uma das equações, mas na outra chamavam a peça amarela de y, o que fazia o sistema ficar errado, então tivemos que intervir, mas conseguiram entender como manter as incógnitas em ambas as equações.

O maior obstáculo foi a parte da resolução. Como não tínhamos controle sobre o número de peças que os alunos poderiam pegar, às vezes os números envolvidos nas equações resultantes ficavam muito grandes, o que dificultou os cálculos e a resolução. Para ajudá-los a pontuar mesmo assim, demos 5 pontos para cada sistema elaborado corretamente e 10 pontos para os solucionados corretamente.

Todos os alunos se mostraram participativos e animados, observando de longe as outras atividades acontecendo, percebemos que os alunos não ficaram parados, estavam todos engajados em resolver os desafios propostos.

A outra atividade ministrada por nosso grupo de estagiários foi a que consistia no jogo de raciocínio lógico envolvendo feijões. Assim como constatado no plano de aula, jogamos 5 jogos com cada um dos grupos de alunos presentes.

Uma das maiores dificuldades que tivemos foi como ser justos com todos os grupos. Isso porque, quando o grupo fazia alguma jogada errada, tínhamos que decidir entre deixá-los

ter a vantagem novamente por meio de uma jogada errada na nossa parte ou aproveitar a vantagem dada a nós para jogar corretamente e vencer a rodada contra o grupo. Entretanto, foram muitas rodadas jogadas com diversos grupos e muitas possibilidades diferentes ocorreram. Sendo assim, procuramos tratar todos os grupos de maneira igualitária, dando uma certa quantidade de chances para que o grupo vencesse a rodada, mas mudando a abordagem e vencendo deles após algumas tentativas falhas.

Outro detalhe foi que alguns grupos conseguiam jogar corretamente e vencer as primeiras rodadas, mas não conseguiam formular uma maneira organizada de estruturar uma estratégia. Sendo assim, acabavam perdendo as rodadas finais, as quais valiam mais pontos, o que acabou prejudicando-os, pois, por um deslize nos jogos finais, deixaram de ganhar muitos pontos. Uma alternativa para esse problema seria deixar todas as rodadas com o mesmo peso, o que acabaria, entretanto, mudando a dinâmica e as premissas da gincana.

Nenhum grupo conseguiu obter a pontuação máxima. O grupo que mais se aproximou desse cenário marcou 95 pontos. Cerca de quatro grupos de todos os dez conseguiram chegar à conclusão de que é preciso deixar dois feijões na mesa para que seu oponente perca o jogo. Dois grupos apenas concluíram que, para fazer com que seu oponente fique com dois feijões na mesa em seu turno, devemos deixá-lo com sete feijões em um turno anterior. Sendo assim, de acordo com o planejado no plano de Aula, nenhum grupo receberia os 15 últimos pontos da atividade. Entretanto, para recompensar os dois grupos que conseguiram desenvolver seu raciocínio de maneira mais elaborada, decidimos dar a eles os 10 pontos previstos para um raciocínio melhor.

Um ponto positivo dessa gincana foi que ela não exigia a efetuação de cálculos. Sendo assim, notamos que os alunos estavam mais dispostos para a atividade. Um ponto negativo que pudemos notar é o de que alguns alunos tomavam a iniciativa e participavam ativamente, enquanto alguns outros ficavam de lado e não participavam tanto.

SEÇÃO 3 – CONSIDERAÇÃO FINAIS

Assim como na edição anterior do Promat, da qual havíamos participado, participar deste processo contribuiu muito com nossa formação acadêmica. Por se tratar de um ambiente de ensino com certas diferenças quando comparado ao colégio (tais como aulas mais longas e mais espaçadas, bem como estudantes mais dispostos), as aulas oferecidas pelo programa trazem perspectivas novas tanto para os discentes, quanto para nós.

Por meio dessa vivência, pudemos encarar alguns dos desafios vistos em outras matérias da graduação, tais como a defasagem de aprendizado e a presença de alunos com necessidades especiais em sala, bem como colocar em prática os conhecimentos teóricos adquiridos acerca da didática do ensino. Ao traçar um comparativo entre o início e o fim das aulas, pudemos verificar que houve uma mudança significativa e benéfica em nossos modos de planejar e executar aulas. Nas últimas aulas, tínhamos mais presença de sala, domínio de conteúdos, engajamento dos estudantes e coesão nas ações entre nós estagiários.

Com relação à receptividade dos alunos, imaginávamos que a dinâmica em grupo seria a ideal por ter sido trabalhada na nossa regência anterior com sucesso. No entanto, percebemos que os alunos não eram tão participativos ao atuarem em grupo, mas achavam interessante quando os professores se aproximavam para tirar dúvidas individualmente, pois explicavam o raciocínio utilizado até o momento, mostravam algumas conjecturas que eles esperavam que poderiam ser o caminho certo para resolução de exercícios e não tinham medo ou vergonha de fazer perguntas, mesmo que fossem sobre conteúdos mais básicos.

Quanto às metodologias utilizadas, aprendemos mais sobre como o uso de materiais didáticos são recursos que promovem uma aprendizagem mais significativa e concreta, além de maior memorização, como no caso da atividade da construção do número Pi, do plano cartesiano com as carteiras para calcular distâncias entre pontos, além dos recursos tecnológicos, como o GeoGebra, que permite a exploração de propriedades de forma intuitiva e mais rápida.

A experiência de regência no Promat também destacou pontos que ainda precisam ser aprimorados para garantir um planejamento mais eficiente e maior fluidez na atuação profissional no futuro. Um exemplo disso é a necessidade de ter um plano de contingência para situações imprevistas, como a consequência da procrastinação da reserva de um laboratório de informática em um momento crítico. Além disso, estar preparado para possíveis perguntas ou respostas dos alunos é essencial para encontrar as melhores maneiras de auxiliá-los de forma rápida e eficaz.

Agradecemos a orientação dos professores Dulcyene Maria Ribeiro e Rogério Luis Rizzi, os quais foram atenciosos conosco durante todo o processo, dando sugestões e contribuições para um bom encaminhamento das aulas. Agradecemos também à professora Pamela Gonçalves, também sempre muito receptiva e que nos ajudou a concretizar o desafio de ministrar os dois estágios obrigatórios simultaneamente.